Sommersemester 2011

5. Übungsblatt zur Algebra II

Abgabe: Do, 19.05.2011, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei p eine Primzahl. Für $n \in \mathbb{N}$ sei I_n die Menge der normierten irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_p[X]$ vom Grad n. Sei $u_n := |I_n|$, und sei
$$g(X) := X^{p^n} - X \ \in \mathbb{F}_p[X].$$
Zeigen Sie:
   (i) $g(X) = \prod_{\substack{f \in I_d \\ d|n}} f(X)$ und $p^n = \sum_{d|n} d \cdot u_d$.
   (ii) Berechnen Sie u_4 für $p = 2$ und u_9 für $p = 3$.

2. Bestimmen Sie für das Polynom $f(X) := X^4 + X + 1$ die Ordnung der Galoisgruppe über $\mathbb{F}_p$ für die Fälle
   (i) $p = 2$
   (ii) $p = 3$.

3. Seien $p_1, \ldots, p_n$ voneinander verschiedene Primzahlen. Bestimmen Sie die Galoisgruppe der Erweiterung
$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}\right)/\mathbb{Q}$$
und die Menge der Zwischenkörper L mit
$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}\right) \supset L \supset \mathbb{Q}.$$

4. Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Sei E/K eine Galoiserweiterung. Sei U eine Untergruppe der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}\,(E/K)$. Für $\alpha \in E$ definieren wir
$$\mathrm{Spur}_U(\alpha) := \sum_{\sigma \in U} \sigma(\alpha).$$
Zeigen Sie: Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von E/K, so gilt
$$\mathrm{E}^U = K\left(\mathrm{Spur}_U(\alpha_1), \ldots, \mathrm{Spur}_U(\alpha_n)\right).$$