Sommersemester 2011

6. Übungsblatt zur Algebra II

Abgabe: Do, 26.05.2011, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei ξ eine primitive 12-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie sämtliche Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\xi) \,/\, \mathbb{Q}$.

2. Sei n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

   (i) Für $n \geq 3$, n ungerade gilt

   $$\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$$

   (ii) Ist p eine Primzahl, so gilt

   $$\Phi_{np}(X) = \begin{cases} \Phi_n(X^p) & \text{für } p \mid n, \\ \frac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)} & \text{für } p \nmid n. \end{cases}$$

3. Geben Sie eine komplexe Zahl ξ an, so daß $\mathbb{Q}(\xi) \,/\, \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe der Ordnung 11 ist.

   Anleitung: Studieren Sie die Gleichung $X^{23} = 1$.

4. Seien p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl mit $p \nmid n$. Sei K_n der Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über $\mathbb{F}_p$.

   Zeigen Sie: Ist $o(\bar{p})$ die Ordnung der von p in $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^*$ repräsentierten Restklasse, so gilt $K_n \simeq \mathbb{F}_{p^{o(\bar{p})}}$. Insbesondere ist $\Phi_{n,\mathbb{F}_p}$, das n-te Kreisteilungspolynom über $\mathbb{F}_p$, genau dann irreduzibel über $\mathbb{F}_p$, wenn $o(\bar{p}) = \phi(n)$ gilt.

   Anleitung: Benutzen Sie Satz 23.7.