Sommersemester 2011

7. Übungsblatt zur Algebra II

Abgabe: Mi, 01.06.2011, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei $E = K(\alpha)$ eine einfache algebraische Körpererweiterung. Sei $f(X) \in K[X]$ das Minimalpolynom von α über K. Zeigen Sie:

   Für alle $y \in K$ gilt $f(Y) = N_{E/K}(y - \alpha)$.

2. Sei $E \,/\, K$ eine separable Körpererweiterung vom Grad n. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die K-Einbettungen von E in die algebraische Hülle $\bar{K}$ von K. Seien weiter $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Elemente aus E. Zeigen Sie:

   (i) Ist $A = (\sigma_i(\alpha_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ und $B = \big(Sp_{E/K}(\alpha_i \alpha_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$, so gilt $B = A^t \cdot A$.

   (ii) In (i) gilt $\operatorname{Det} A \neq 0$ genau dann, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von E über K ist.

3. Sei $E \,/\, K$ eine Körpererweiterung vom Grad n. Zeigen Sie:

   (i) Die Menge $M := \big\{\alpha \in E \,|\, Sp_{E/K}(\alpha) = 0\big\}$ ist ein linearer K-Unterraum des K-Vektorraums E.

   (ii) Ist $E \,/\, K$ inseparabel, so gilt $M = E$.

   (iii) Ist $E \,/\, K$ separabel, so gilt $\operatorname{Dim}_K M = n - 1$ und $Sp_{E/K} : E \longrightarrow K$ ist surjektiv.

4. Sei p eine Primzahl. Sei $\mathbb{F}$ der Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_p$ mit $[\mathbb{F} : \mathbb{F}_p] = n$. Zeigen Sie:

   (i) $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ gilt $N_{\mathbb{F}/\mathbb{F}_p}(\alpha) = \alpha^{\frac{p^n - 1}{p-1}}$.

   (ii) Schließen Sie aus (i): $N_{\mathbb{F}/\mathbb{F}_p} : \mathbb{F}^* \longrightarrow \mathbb{F}_p^*$ ist surjektiv.
   (*Anleitung:* $\mathbb{F}^*$ ist zyklisch.)

   (iii) Für die Abbildung $N_{\mathbb{F}/\mathbb{F}_p}$ aus (ii) gilt:
   $\operatorname{Kern} N_{\mathbb{F}/\mathbb{F}_p} = \big\{\beta \in \mathbb{F}^* \,|\, \exists \gamma \in \mathbb{F}^* \text{ mit } \beta = \gamma^{p-1}\big\}$.