8. Übungsblatt zur Algebra II

Abgabe: Do, 09.06.2011, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Zeigen Sie: Für zwei rationale Zahlen a, b sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:
   (i) $a^2 + b^2 = 1$.
   (ii) Es gibt ein Paar $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $a = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$, $b = \frac{2mn}{m^2+n^2}$.

2. Sei $E\,/\,K$ eine endliche zyklische Galoiserweiterung mit $G = Gal(E\,/\,K)$. Sei σ ein erzeugendes Element von G. Hilbert 90 sagt:

   Für $a \in E^*$ gilt
   $$\text{(M)} \quad N_{E/K}(a) = 1 \Leftrightarrow \exists\, b \in E^* : a = \frac{b}{\sigma(b)}.$$
   Für $a \in E$ gilt
   $$\text{(A)} \quad Sp_{E/K}(a) = 0 \Leftrightarrow \exists\, b \in E : a = b - \sigma(b).$$
   Sei L_M die Menge der Lösungen $b \in E^*$ von (M). Sei L_A die Menge der Lösungen b von (A).

   Zeigen Sie:

   (i) Es gibt ein $b_0 \in E^*$, so daß gilt
   $$L_M = \{cb_0 \mid c \in K^*\}.$$
   (ii) Es gibt ein $b_0 \in E$, so daß gilt
   $$L_A = \{c + b_0 \mid c \in K\}.$$

3. Sei K ein Körper der Charakteristik 0, welcher die n-ten Einheitswurzeln enthält. Sei $f(X) = X^n - a \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom mit dem Zerfällungskörper E.

   Sei α eine Nullstelle von f in E. Bestimmen Sie sämtliche Zwischenkörper L mit $K \subset L \subset E$, und geben Sie für diese Zwischenkörper eine Basis über K an.

4. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper E des Polynoms $X^6 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$ und die Galoisgruppe $Gal(E\,/\,\mathbb{Q})$.