9. Übungsblatt zur Algebra II

Abgabe: Do, 16.06.2011, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Seien $K = \mathbb{Q}[i]$ und $E = K[\alpha]$, wobei α eine Nullstelle von $f(X) = X^8 - 2$ sei.

Zeigen Sie:

- (i) f ist irreduzibel über K .
 - (ii) E ist der Zerfällungskörper von f über K .
 - (iii) Es gibt genau einen K -Automorphismus σ von E mit $\sigma(\alpha) = (1+i)\alpha^{-3}$.
 σ erzeugt $Gal(E/K)$.
 - (iv) Bestimmen Sie sämtliche Zwischenkörper von E/K .
 - (v) $E/\mathbb{Q}$ ist eine Galoiserweiterung. Bestimmen Sie $Gal(E/\mathbb{Q})$.
2. Sei G eine endliche Gruppe, welche direktes Produkt von Sylowuntergruppen ist. Zeigen Sie: G ist auflösbar.

3. Zeigen Sie:

- (i) Für $n \geq 2$ wird S_n von $(1, 2)$ und $(1, 2, \dots, n-1, n)$ erzeugt.
(Anleitung: Satz 27.4)
- (ii) Sei p eine Primzahl und U eine Untergruppe von S_p , welche eine Transposition und einen p -Zyklus enthalte. Dann gilt $U = S_p$.
- (iii) In (ii) ist die Voraussetzung "p Primzahl" wesentlich:
Für die von $(1, 3)$ und $(1, 2, 3, 4)$ erzeugte Untergruppe U von S_4 gilt $U \simeq D_4$ (Diedergruppe vom Grad 4) und somit insbesondere $U \neq S_4$.