

10. Übungsblatt zur Algebra II

Abgabe: Mi, 22.06.2011, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (i) Sei p eine Primzahl. Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad p . Sei E der Zerfällungskörper von f über \mathbb{Q} .
Zeigen Sie: Hat f genau zwei nichtreelle Nullstellen, so ist die Galoisgruppe $G = \text{Gal}(E / \mathbb{Q})$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_p .
- (ii) Sei E der Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $G = \text{Gal}(E / \mathbb{Q})$.
2. (i) Bestimmen Sie die Anzahl der Untergruppen der Ordnung 8 von S_4 . Sind diese Untergruppen jeweils isomorph?
- (ii) Sei $U = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4\}$. Ist U eine Untergruppe von S_4 ? Gilt $U \triangleleft S_4$?
- (iii) Gibt es in S_4 ein Element der Ordnung 6?
- (iv) Alle Untergruppen der Ordnung 6 von S_4 sind isomorph.
- (v) S_4 hat nur eine Untergruppe der Ordnung 12, nämlich A_4 .
- (vi) Bestimmen Sie sämtliche Gruppenhomomorphismen
$$\varphi : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +) \longrightarrow S_4.$$
- (vii) Bestimmen Sie sämtliche Normalteiler von S_4 .