Sommersemester 2011

11. Übungsblatt zur Algebra II

Abgabe: Do, 30.06.2011, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie: Zu G gibt es ein Paar von Körpern E, K mit der folgenden Eigenschaft:

   $E\,/\,K$ ist eine endliche Galoiserweiterung, und $Gal(E\,/\,K)$ ist isomorph zu G.

   (*Anleitung:* Gilt $|G| = n$, so ist G zu einer Untergruppe von S_n isomorph.)

2. Sei K ein Körper und
$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n \ \in K[X]$$
   ein normiertes Polynom.

   Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln von f im algebraischen Abschluss $\bar{K}$ von K. Dann heißt
$$\triangle(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$
   Diskriminante von f. Zeigen Sie:

   (i) $\triangle(f)$ läßt sich als Polynom in $a_1, \ldots, a_n$ mit Koeffizienten aus dem Primkörper von K schreiben. Insbesondere gilt: $\triangle(f) \in K$.

   (ii) Sei E der Zerfällungskörper von f über K. Dann gilt $\sqrt{\triangle(f)} \in E$ und $\left[K\left(\sqrt{\triangle(f)}\right) : K\right] \leq 2$.

3. Sei $n \geq 2$.

   (i) Zeigen Sie: Ist U eine Untergruppe von S_n, welche nicht in A_n enthalten ist, so liegt genau die Hälfte der Elemente von U in A_n.

   (ii) Bestimmen Sie das Zentrum von S_n.

4. Sei K ein Körper der Charakteristik 0, welcher die n-ten Einheitswurzeln enthält. Seien $a_1, \ldots, a_r \in K$ und
$$f(X) = (X^n - a_1) \cdot \ldots \cdot (X^n - a_r).$$
   Sei E der Zerfällungskörper von f über K.

   Zeigen Sie: $Gal(E\,/\,K)$ kann mit einer Untergruppe von $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,, +\right)^r$ identifiziert werden.