Wintersemester 2010/2011

1. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 28.10.2010, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei $(G, \circ)$ eine Halbgruppe. Zeigen Sie: $(G, \circ)$ ist eine Gruppe genau dann wenn folgende Aussage erfüllt ist:

   Für alle $a \in G$ sind die Linkstranslation l_a und die Rechtstranslation r_a surjektiv.

2. Es sei $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ eine sechselementige Menge mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$. Vervollständigen Sie die nachfolgende Verknüpfungstafel unter der Annahme, daß $(G, \circ)$ eine Gruppe ist:

$\circ$	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

3. Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

   (a) Ist $Aut(G) = \{\mathrm{Id}\}$, so ist G abelsch.

   (b) Ist $a \mapsto a^2$ ein Homomorphismus, so ist G abelsch.

   (c) Ist $a \mapsto a^{-1}$ ein Homomorphismus, so ist G abelsch.

4. Es sei G eine endliche Gruppe. Weiter sei $\varphi \in Aut(G)$ fixpunktfrei, d.h. aus $\varphi(a) = a$ für ein $a \in G$ folgt $a = e$. Zeigen Sie:

   Zu jedem $a \in G$ existiert genau ein $b \in G$ mit $a = b^{-1}\varphi(b)$.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\psi : b \mapsto b^{-1}\varphi(b)$ ist injektiv.