3. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 11.11.2010, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei G eine Gruppe, deren Elemente sämtlich eine Ordnung ≤ 2 haben. Zeigen Sie:
   (i) G ist abelsch.
   (ii) Ist G endlich, so ist $ord\, G$ eine Potenz von 2.

2. (i) Seien G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Es gelte $[G:H]=2$. Dann folgt $H \triangleleft G$.
   (ii) Seien G eine Gruppe und $k \in \mathbb{N}$. G besitze genau eine Untergruppe H mit $[G:H]=k$. Dann folgt $H \triangleleft G$.

3. Seien G, G', G'' Gruppen. Seien $\tau : G \longrightarrow G'$ ein Homomorphismus und $\varrho : G \longrightarrow G''$ ein Epimorphismus. Zeigen Sie:
   (i) Gilt Kern $\varrho \subset$ Kern τ, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\sigma : G'' \longrightarrow G'$ mit $\tau = \sigma \circ \varrho$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varrho"'] & G' \\ G'' \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

   (ii) Es gelte Kern $\varrho \subset$ Kern τ. Dann folgt:
   Ist τ surjektiv, so ist auch σ surjektiv.
   (iii) Gilt Kern $\varrho =$ Kern τ, so ist σ injektiv.

4. Sei G eine Gruppe. Für Elemente $a, b \in G$ heißt

$$[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$$

   der *Kommutator* von a, b. Die von allen Kommutatoren $[a,b]$ mit $a, b \in G$ erzeugte Untergruppe von G wird mit $[G,G]$ bezeichnet. Sie heißt die Kommutatoruntergruppe von G. Zeigen Sie:
   (i) $[G,G] \triangleleft G$ und $G/[G,G]$ ist abelsch.
   (ii) Sei $\pi : G \longrightarrow G/[G,G]$ die kanonische Projektion. Ist $\varphi : G \longrightarrow A$ ein Homomorphismus von G in eine abelsche Gruppe A, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\psi : G/[G,G] \longrightarrow A$ mit $\varphi = \psi \circ \pi$.
   (*Anleitung:* Benutzen Sie Aufgabe 3.)