Wintersemester 2010/2011

4. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 18.11.2010, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Für reelle Zahlen a, b sei $t_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$t_{a,b}(x) = ax + b$$
definiert. Sei
$$G = \{t_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$
Zeigen Sie:
   - (i) G mit der Hindereinanderausführung von Abbildungen bildet eine Gruppe.
   - (ii) Für $N = \{t_{1,b} \,|b \in \mathbb{R}\}$ gilt $N \triangleleft G$.
   - (iii) G/N ist isomorph zur multiplikativen Gruppe $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$.

2. Sei G eine Gruppe. Das Zentrum von G ist definiert durch
$$Z(G) := \{a \in G \mid \forall g \in G \; ag = ga\}.$$
Zeigen Sie:
   - (i) Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.
   - (ii) Sei $\mathrm{Inn}(G)$ die Gruppe der inneren Automorphismen von G (für $a \in G$ sei ι_a der durch $g \mapsto aga^{-1}$ definierte innere Automorphismus von G). Es gilt $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$.

3. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:
   - (i) Ist G eine Gruppe der Ordnung p^n $(n \in \mathbb{N})$, so gilt für das Zentrum von G: $Z(G) \neq \{e\}$.($Z(G)$ ist in Aufgabe 2 definiert.)
     Anleitung: Lassen Sie G durch Konjugation auf sich selbst operieren. Benutzen Sie die Bahnzerlegungsformel.)
   - (ii) Sei G eine Gruppe der Ordnung p^2. Dann ist G abelsch.
     Anleitung: Verwenden Sie Aufgabe 2 (i).
   - (iii) Sei G eine nichtabelsche Gruppe mit p^3 Elementen. Dann gilt $\mathrm{ord}(Z(G)) = p$.

4. Seien U und V Untergruppen von $(\mathbb{Q}, +)$. Zeigen Sie:
   - (i) Gilt $U \neq \mathbb{Q}$, so ist $\mathbb{Q}/U$ nicht endlich.
   - (ii) Ist $\mathbb{Q}/U$ zyklisch, so ist $U = \mathbb{Q}$.
     Anleitung: Benutzen Sie (i).
   - (iii) Gilt $U \neq \{0\}, V \neq \{0\}$, so folgt $U \cap V \neq \{0\}$.