

5. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 25.11.2010, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (i) Bestimmen Sie alle Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe S_3 .
(ii) Geben Sie eine 2-Sylowgruppe und eine 3-Sylowgruppe von S_4 an.
(iii) Wie viele 2-Sylowgruppen besitzt S_5 ?
2. Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 200 besitzt einen nichttrivialen abelschen Normalteiler.
3. Sei G eine Gruppe der Ordnung 12. Seien s_2 und s_3 die Anzahlen der verschiedenen 2- bzw. 3-Sylow-Untergruppen von G .
 - (i) Welche Werte sind für s_2 möglich? Welche für s_3 ?
 - (ii) Was folgt aus $s_2 = 3$ für s_3 ? Was folgt aus $s_3 = 4$ für s_2 ?
 - (iii) Folgern Sie: G besitzt einen nichttrivialen Normalteiler.
4. Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der p -Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe S_p .

Hinweis: Ohne Beweis dürfen die folgenden Aussagen verwendet werden:

- (a) Jede Permutation lässt sich als Produkt disjunkter Zykel schreiben
- (b) Sind σ und τ zwei disjunkte Zykel, so gilt $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

Anleitung: Überlegen Sie sich, welche Elemente der S_p die Ordnung p haben und welche Gestalt diese in der nach (a) möglichen Zerlegung in disjunkte Zykel haben.