

6. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 02.12.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (a) Sei $V = \{e, a, b, c\}$ die Kleinsche Vierergruppe. Stellen Sie V auf drei verschiedene Arten als direkte Summe von Untergruppen der Ordnung 2 dar.
- (b) Stellen Sie $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ als direkte Summe zweier nichttrivialer Untergruppen dar.
- (c) Stellen Sie die Diedergruppe D_6 als direkte Summe einer Untergruppe der Ordnung 2 und einer Untergruppe der Ordnung 6 dar.
2. Sei G eine Gruppe. Seien U_1, \dots, U_n Untergruppen von G . Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - (i) G ist direktes Produkt von U_1, \dots, U_n .
 - (ii) (a) $G = U_1 \cdot \dots \cdot U_n$
 (b) $\forall i (1 \leq i \leq n) : U_i \cap (U_1 \cdot \dots \cdot U_{i-1} \cdot U_{i+1} \cdot \dots \cdot U_n) = \{e\}$
 (c) $\forall i$ gilt $U_i \triangleleft G$.
 - (iii) (a) $\forall i, j (1 \leq i < j \leq n), \forall x \in U_i, y \in U_j$ gilt $xy = yx$
 (b) Jedes Element $x \in G$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ mit $x_i \in U_i$ für $i = 1, \dots, n$.
3. Zeigen Sie: Eine Gruppe G der Ordnung 15 ist zyklisch.
4. Zeigen Sie: Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ besitzt kein endliches Erzeugendensystem.