

## 6. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 02.12.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (a) Sei  $V = \{e, a, b, c\}$  die Kleinsche Vierergruppe. Stellen Sie  $V$  auf drei verschiedene Arten als direkte Summe von Untergruppen der Ordnung 2 dar.  
(b) Stellen Sie  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$  als direkte Summe zweier nichttrivialer Untergruppen dar.  
(c) Stellen Sie die Diedergruppe  $D_6$  als direkte Summe einer Untergruppe der Ordnung 2 und einer Untergruppe der Ordnung 6 dar.
2. Sei  $G$  eine Gruppe. Seien  $U_1, \dots, U_n$  Untergruppen von  $G$ . Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  - (i)  $G$  ist direktes Produkt von  $U_1, \dots, U_n$ .
  - (ii) (α)  $G = U_1 \cdot \dots \cdot U_n$   
(β)  $\forall i (1 \leq i \leq n) : U_i \cap (U_1 \cdot \dots \cdot U_{i-1} \cdot U_{i+1} \cdot \dots \cdot U_n) = \{e\}$   
(γ)  $\forall i$  gilt  $U_i \triangleleft G$ .
  - (iii) (α)  $\forall i, j (1 \leq i < j \leq n), \forall x \in U_i, y \in U_j$  gilt  $xy = yx$   
(β) Jedes Element  $x \in G$  besitzt eine eindeutige Darstellung  $x = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  mit  $x_i \in U_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .
3. Zeigen Sie: Eine Gruppe  $G$  der Ordnung 15 ist zyklisch.
4. Zeigen Sie: Die Gruppe  $(\mathbb{Q}, +)$  besitzt kein endliches Erzeugendensystem.