Wintersemester 2010/2011

7. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 09.12.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung
   (i) 1991
   (ii) 1992
   (iii) 2048.

2. (i) Seien A_1 und A_2 zyklische Gruppen mit $\operatorname{ord} A_1 = n_1$, $\operatorname{ord} A_2 = n_2$ und mit $(n_1, n_2) = 1$.
   Zeigen Sie: $A_1 \oplus A_2$ ist zyklisch.
   (ii) Zeigen Sie: Sind p und q verschiedene Primzahlen, so besitzt jede abelsche Gruppe der Ordnung p^2q^2 ein Erzeugendensystem mit nicht mehr als zwei Elementen.

3. Sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung p^s, wobei p eine Primzahl und s eine natürliche Zahl sei. G sei die direkte Summe von m zyklischen Untergruppen. Sei U die Teilmenge von G, welche aus den Elementen einer Ordnung $\leq p$ besteht. Zeigen Sie:
   (i) U ist eine Untergruppe von G.
   (ii) Es gilt $m \leq s$.

   Bestimmen Sie $\operatorname{ord} U$, und geben Sie eine Darstellung von U als direkte Summe an.

4. Seien G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. U heißt maximale Untergruppe genau dann, wenn gilt $U \neq G$ und die einzigen Untergruppen U' mit $U \subset U'$ sind U und G. U heißt minimale Untergruppe genau dann, wenn gilt $U \neq \{e\}$ und die einzigen Untergruppen U' mit $U' \subset U$ sind U und $\{e\}$. Zeigen Sie:
   (i) Eine nichttriviale endliche zyklische Gruppe besitzt ebenso viele maximale wie minimale Untergruppen.
   (ii) Eine endliche abelsche Gruppe besitzt genau dann nur eine minimale Untergruppe, wenn sie nur eine maximale Untergruppe besitzt.
   (iii) Bestimmen Sie die abelschen Gruppen, welche genau eine maximale Untergruppe besitzen.