

8. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 16.12.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (a) Sei R ein nullteilerfreier Ring. Zeigen Sie: Gibt es in R Elemente a, b mit $a \neq 0$ und mit $ab = a$ und $ba = a$, so ist R ein Ring mit Eins.
(b) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Sei weiter $E(R)$ die Einheitsgruppe von R . Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ existiert. $Nil(R)$ bezeichne die Menge aller nilpotenten Elemente in R . Zeigen Sie:
 - (i) $(Nil(R), +)$ ist eine Untergruppe von $(R, +)$.
 - (ii) Für $\varepsilon \in E(R)$ und $x \in Nil(R)$ ist $\varepsilon + x \in E(R)$.
2. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Ideale besitzt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
(b) Wie viele Ideale besitzt ein Ring, der direktes Produkt von s Körpern ist?
3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Systems simultaner Kongruenzen in \mathbb{Z} :

$$x \equiv 7 \pmod{11}$$

$$x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x \equiv 18 \pmod{21}$$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:
 - (a) $\bar{5} \cdot \bar{x} = \bar{4}$
 - (b) $\bar{y}^2 - \bar{y} + \bar{1} = \bar{0}$.
 - (c) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, welche in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ keine Lösung besitzt.