

## 8. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 16.12.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (a) Sei  $R$  ein nullteilerfreier Ring. Zeigen Sie: Gibt es in  $R$  Elemente  $a, b$  mit  $a \neq 0$  und mit  $ab = a$  und  $ba = a$ , so ist  $R$  ein Ring mit Eins.  
 (b) Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Sei weiter  $E(R)$  die Einheitengruppe von  $R$ . Ein Element  $x \in R$  heißt *nilpotent*, wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x^n = 0$  existiert.  $\text{Nil}(R)$  bezeichne die Menge aller nilpotenten Elemente in  $R$ . Zeigen Sie:
  - (i)  $(\text{Nil}(R), +)$  ist eine Untergruppe von  $(R, +)$ .
  - (ii) Für  $\varepsilon \in E(R)$  und  $x \in \text{Nil}(R)$  ist  $\varepsilon + x \in E(R)$ .
2. (a) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wie viele Ideale besitzt  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ?  
 (b) Wie viele Ideale besitzt ein Ring, der direktes Produkt von  $s$  Körpern ist?
3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Systems simultaner Kongruenzen in  $\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned}x &\equiv 7 \pmod{11} \\x &\equiv 1 \pmod{5} \\x &\equiv 18 \pmod{21}\end{aligned}$$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ :
  - (a)  $\bar{5} \cdot \bar{x} = \bar{4}$
  - (b)  $\bar{y}^2 - \bar{y} + \bar{1} = \bar{0}$ .
  - (c) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, welche in  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  keine Lösung besitzt.