# 9. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 13.01.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins ($R$ ist nicht notwendig nullteilerfrei). Sei $S$ eine nichtleere multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von $R$ mit $1 \in S$ ($0 \in S$ ist nicht ausdrücklich ausgeschlossen). Auf $R \times S$ definieren wir die Relation $\sim$ durch

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S \,\mathrm{mit}\, (r_1 s_2 - r_2 s_1)s = 0.$$

   (i) Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

   (ii) Sei $RS^{-1}$ die Menge der Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ in $R \times S$. Für $(r, s) \in R \times S$ sei $\frac{r}{s}$ die von $(r, s)$ repräsentierte Äquivalenzklasse in $RS^{-1}$. Zeigen Sie:
   Durch
$$\left(\frac{r_1}{s_1}\right) + \left(\frac{r_2}{s_2}\right) := \left(\frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}\right)$$
   und
$$\left(\frac{r_1}{s_1}\right) \cdot \left(\frac{r_2}{s_2}\right) := \left(\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}\right)$$
   werden Verknüpfungen auf $RS^{-1}$ definiert, so daß $(RS^{-1}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. Es gilt $RS^{-1} = \{0\}$ genau dann, wenn $0 \in S$. Im Falle $0 \notin S$ ist $RS^{-1}$ ein Ring mit Eins.

   (iii) Die Abbildung
$$\varphi : R \longrightarrow RS^{-1}$$
   mit
$$\varphi(r) = \frac{r}{1}$$
   ist ein Ringhomomorphismus. $\varphi$ ist injektiv genau dann, wenn gilt $0 \notin S$ und $S$ enthält keine Nullteiler. Gilt $0 \notin S$, so sind die Elemente $\frac{s_1}{s_2}$ in $RS^{-1}$ mit $s_1, s_2 \in S$ Einheiten.

2. Sämtliche in dieser Aufgabe vorkommenden Ringe seien kommutative Ringe mit Eins. Sei $R$ ein Ring. Sei $S$ eine Teilmenge von $R$, welche bei der Multiplikation abgeschlossen sei und welche 1 enthalte. Unter einem Quotientenring von $R$ zur Nennermenge $S$ verstehen wir ein Paar $(R_S, \varphi)$, so daß $R_S$ ein Ring und

$$\varphi : R \longrightarrow R_S$$

ein Ringhomomorphismus sind, und so daß darüber hinaus die beiden folgenden Forderungen erfüllt sind:

(a) Für jedes $s \in S$ ist $\varphi(s)$ eine Einheit in $R_S$.

(b) Ist $T$ ein weiterer Ring und ist

$$\psi : R \longrightarrow T$$

ein Ringhomomorphismus, so daß für jedes $s \in S$ gilt: $\psi(s)$ ist eine Einheit in $T$, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus

$$\chi : R_S \longrightarrow T$$

mit $\psi = \chi \circ \varphi$.

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & R_S \arrow[d, dashed, "\chi"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie:

(i) $R_S$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (daher heißt $R_S$ *der* Quotientenring von $R$ zur Nennermenge $S$).
(*Anleitung:* Ist $(R', \varphi')$ ein weiterer Quotientenring von $R$ zur Nennermenge $S$, so erhalten wir zwei Diagramme vom Typ $(*)$, eines mit $R'$ statt $T$, eines mit $R_S$ statt $T$. Überlegen Sie sich, daß man dann mittels (b) den gesuchten Isomorphismus von $R_S$ nach $R'$ erhält.)

(ii) Gilt $0 \notin S$, so ist das Paar $(RS^{-1}, \varphi)$ aus Aufgabe 1 der Quotientenring von $R$ zur Nennermenge $S$.

3. Sei $R = \mathbb{Z}$. Sei $p$ eine Primzahl. Sei $S := \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$.

(i) Bestimmen Sie $\mathbb{Z}_S$ explizit.

(ii) Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_S$.

(iii) Bestimmen Sie die Menge der Ideale von $\mathbb{Z}_S$.

4. Es seien $R$ ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über $R$. Weiter sei $E(R)$ die Gruppe der Einheiten in $R$. Zeigen Sie:

(i) Jedes Paar $(a, b) \in E(R) \times R$ bestimmt eindeutig einen Automorphismus $\varphi$ von $R[X]$ mit $\varphi_{|R} = \mathrm{id}_R$ und $\varphi(X) = aX + b$.

(ii) Zu jedem Automorphismus $\varphi$ von $R[X]$ mit $\varphi_{|R} = \mathrm{id}_R$ gibt es ein Paar $(a, b) \in E(R) \times R$, so daß gilt $\varphi(X) = aX + b$.

(iii) Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}[X])$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[X])$.