Wintersemester 2010/2011

10. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 20.01.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei R ein Integritätsbereich. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Für $r_1, \ldots, r_n \in R$ heißt ein Element $v \in R$ kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) von $r_1, \ldots, r_n$ genau dann, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

   (α) $\forall i \, (1 \leq i \leq n)$ gilt $r_i | v$

   (β) Ist $u \in R$ ein gemeinsames Vielfaches der r_i, d.h. gelte $\forall i \, (i \leq i \leq n)$ $r_i | u$, so folgt $v | u$.

   Zeigen Sie: Ist R ein Hauptidealring, so gibt es für jedes n-Tupel $(r_1, \ldots, r_n)$ von Elementen $r_i \in R$ ein kgV v. Ist $v \neq 0$, so gilt: v ist bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt.

   Wie läßt sich das Ideal (v) in Abhängigkeit von $(r_1), \ldots, (r_n)$ darstellen?

2. Sei R ein ZPE-Ring. Sei P ein vollständiges Repräsentantensystem für die Menge der Primelemente von R. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $i = 1, \ldots, n$ seien

$$r_i := \varepsilon_i \prod_{p \in P} p^{\nu_p(r_i)}$$

   die Primfaktorzerlegungen der Elemente $r_1, \ldots r_n \in R \backslash \{0\}$.

   Zeigen Sie: $\mathrm{ggT}(r_1, \ldots, r_n)$ und $\mathrm{kgV}(r_1, \ldots, r_n)$ existieren, und es gelten

$$\mathrm{ggT}\,(r_1, \ldots, r_n) = \prod_{p \in P} p^{\min\{\nu_p(r_i)\}}$$

$$\mathrm{kgV}\,(r_1, \ldots, r_n) = \prod_{p \in P} p^{\max\{\nu_p(r_i)\}}.$$

3. Sei R ein euklidischer Ring. Seien a_1, a_2 Elemente aus R mit $a_2 \neq 0$. Wir definieren die Folge $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ induktiv durch $b_0 = a_1$, $b_1 = a_2$ und für $i \geq 1$

$$b_{i+1} := \begin{cases} \text{Rest von } b_{i-1} \text{ bei Division durch } b_i, \text{ falls } b_i \neq 0 \\ 0 \quad \text{falls } b_i = 0. \end{cases}$$

   (i) Zeigen Sie: Es gibt einen kleinsten Index $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_{i_0+1} = 0$. Für diesen Index i_0 gilt $b_i = \mathrm{ggT}\,(a_1, a_2)$. Der Algorithmus liefert Elemente $c_1, c_2 \in R$ mit
   $$b_{i_0} = c_1 a_1 + c_2 a_2.$$

   (ii) Seien a und b ganze Zahlen. Zeigen Sie: Die diophantische Gleichung
   $$ax + by = c$$
   ist genau dann durch Elemente $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ lösbar, wenn gilt $\mathrm{ggt}\,(a, b)|c$.

   (iii) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der diophantischen Gleichung
   $$102x + 90y = 108.$$

4. Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie: die folgenden Aussagen sind äquivalent.

   (i) R ist ein ZPE-Ring

   (ii) In R gilt der Teilerkettensatz für Elemente und jedes irreduzible Element ist Primelement.

   (iii) In R gelten der Teilerkettensatz für Elemente und darüber hinaus die folgende Bedingung:
   Ist $r \in R \backslash \{0\}$, $r \notin E(R)$ und gelte
   $$r = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s = q_1 \cdot \ldots \cdot q_t$$
   mit irreduziblen Elementen $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t$, so folgt $s = t$ und es gibt eine Permutation π von $\{1, \ldots, s\}$, so daß für alle σ mit $1 \leq \sigma \leq s$ p_σ zu $q_{\pi(\sigma)}$ assoziiert ist.