Wintersemester 2010/2011

11. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 27.01.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei R ein ZPE-Ring. Sei $P \subset R$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Menge derÄquivalenzklassen von Primelementen, so daß also jedes Element $a \in R\backslash\{0\}$ sich in eindeutiger Weise schreiben läßt in der Form

$$a = \epsilon \prod_{p \in P} p^{\nu_p(a)},$$

mit einer Einheit ϵ und mit $\nu_p(a) \in \mathbb{N}_0$, $\nu_p(a) \neq 0$ für höchstens endlich viele $p \in P$. Sei $R[X]$ der Polynomring in einer Variablen über R und sei

$$\Phi : R[X] \longrightarrow R[X]$$

ein Automorphismus, so daß gilt $\varphi := \Phi_{|R}$ ist ein Automorphismus

$$\varphi : R \longrightarrow R.$$

Zeigen Sie:

(i) Für jedes Primelement $p \in R$ ist auch $\varphi(p)$ ein Primelement.

(ii) Für $f(X) \in R[X]$ sei $c(f)$ der Inhalt von f. Dann gilt für jedes $p \in P$ und für alle $f \in R[X]$

$$\nu_p(c(f)) = \nu_{\varphi(p)}(c(\Phi(f))).$$

(iii) $f \in R[X]$ ist primitiv genau dann, wenn auch $\Phi(f)$ primitiv ist. Für $r \in R$ gilt: Das Polynom $f(X) \in R[X]$ ist primitiv genau dann, wenn $f(X + r)$ primitiv ist.

2. Bestimmen Sie sämtliche irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 5 im Polynomring $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}\,[X]$.

3. Überprüfen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibilität:
   (a) $3X^3 - 5X^2 + 128X + 17 \in \mathbb{Q}[X]$
   (b) $X^5 - 2X^4 + 6X + 10 \in \mathbb{Q}[X]$
   (c) $X^4 - 10X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

4. Sei

$$f(X,Y) = Y^3 + X^2Y + 3Y^2 + X^2 + 3Y + X + 1 \in \mathbb{Z}[X,Y].$$

   Zeigen Sie:
   (a) f ist in $\mathbb{Z}[X,Y]$ irreduzibel.
   (b) Für jede Primzahl p ist $f(p,Y)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[Y]$.