Wintersemester 2010/2011

12. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 03.02.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei p eine Primzahl. Seien

$$M_1 = \{a + b\sqrt[3]{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

und

$$M_2 = \left\{a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p}^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf Ihre Richtigkeit:

(i) M_1 ist ein Körper.

(ii) M_2 ist ein Körper.

2. Sei E ein Erweiterungskörper des Körpers K. Sei $x \in E$ transzendent über K. Zeigen Sie:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist x^n transzendent über K.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $[K(x) : K(x^n)] = n$, d.h. $K(x)$ ist eine algebraische Erweiterung von $K(x^n)$ vom Grad n.

3. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms

$$p(X) = X^3 + 3X - 2 \in \mathbb{Q}[X].$$

(i) Zeigen Sie: $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$.

(ii) Stellen Sie die Elemente α^{-1}, $(1+\alpha)^{-1}$,$(1-\alpha+\alpha^2)(5+3\alpha-2\alpha^2)$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen von $1, \alpha, \alpha^2$ dar.

4. Sei K der Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$, welcher durch Adjunktion aller Nullstellen in $\mathbb{C}$ der Menge der Polynome $X^2 + aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ entsteht. Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Sei M die Menge der Quadratwurzeln $\sqrt{p}$ mit $p \in \mathbb{P} \cup \{-1\}$. Zeigen Sie:

   (i) $K = \mathbb{Q}(M)$.

   (ii) Sei L ein Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset L \subset K$ mit $[L : \mathbb{Q}] < \infty$. Dann gibt es Elemente $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n} \in M$ mit $L \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}\right)$.

   (iii) Für L wie in (ii) gilt: es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $[L : \mathbb{Q}] = 2^k$.