Wintersemester 2010/2011

13. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 10.02.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^3 + 2X - 1$.
   (i) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$
   (ii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha^2 + \alpha$ über $\mathbb{Q}$.

2. Sei ${}^{E}/_{K}$ eine Körpererweiterung und sei
$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu X^\nu \in K[X]$$
   ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad > 1.
   (i) Zeigen Sie: Gilt $\chi(K) \neq 2$, und gibt es ein $\alpha \in E$ mit $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$, dann existiert ein Polynom $g(X) \in K[X]$ mit $f(X) = g(X^2)$.
   (ii) Zeigen Sie: Gilt für $i = 1, \ldots, n$ $a_{n-i} = a_i$ und gibt es ein $\alpha \in E$ mit $f(\alpha) = 0$, dann existiert ein $\beta \in E \setminus \{\alpha\}$ mit $f(\beta) = 0$.

3. (i) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, daß K unendlich viele Elemente enthält.
   (ii) Sei p eine Primzahl. Sei K ein algebraischer Abschluß des Körpers ${}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}}$. Zeigen Sie, daß es zu jedem $\alpha \in K \setminus \{0\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\alpha^n = 1$.

4. Sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß des Körpers K. Zeigen Sie: Ist K abzählbar, so ist auch $\bar{K}$ abzählbar.