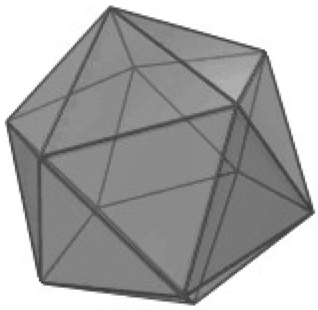
LINEARE ALGEBRA I



Zusammenfassung des Vorlesungsskripts
aus der Vorlesung 'Lineare Algebra I'
(Prof. Schlickewei)

von Márton Eifert

Inhaltsverzeichnis

§0. Grundlegende Notationen

Notation	Bedeutung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathrm{Hom}_K(V,W)$	Menge der Homomorphismen (linearen Abbildungen) von V nach W
$\mathrm{End}_K(V)$	Menge der Endomorphismen (lin. Abbildungen) von V (in sich)
$\mathfrak{M}(m,n;K)$	Menge der $m\times n$-Matrizen mit Einträgen aus K
$GL(n;K)$	Allgemeine lin. Gruppe: Gruppe der invertierbaren $n\times n$-Matrizen
$SL(n;K)$	Spezielle lin. Gruppe: Gruppe der $n\times n$-Matrizen mit Det.1
$\mathbb{E}_n$, $\mathbb{O}$	$n\times n$-Einheitsmatrix, Nullmatrix
$\mathcal{S}_n$	Symmetrische Gruppe (auch Permutationsgruppe) vom Grad n
$\mathcal{A}_n$	Alternierende Gruppe (Grp. der geraden Permutationen) vom Grad n
$K[X]$	Polynomring: Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus K und Variablen X
$V(\lambda,\varphi)$, $V(\lambda,A)$	Eigenraum (Unterraum von V) zum Eigenwert λ von φ (von A)
$\chi_\varphi(X)$, $\chi_A(X)$	Charakteristisches Polynom von φ (von A) $\in K[X]$
$\mu_\varphi(X)$, $\mu_A(X)$	Minimalpolynom von φ (von A) $\in K[X]$
$O(V)$	Gruppe der orthogonalen Endomorphismen von V
$O(n;\mathbb{R})$	Orthogonale Gruppe: Gruppe der orthogonalen $n\times n$-Matrizen
$SO(n;\mathbb{R})$	Spez. orthog. Gruppe: Gruppe der orth. $n\times n$-Matrizen mit Det. 1
(V,β)	Euklidischer Raum V mit Skalarprodukt β

§1. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

$$(1.1)\ \begin{matrix} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{matrix} \quad (1.1.1)\ \begin{matrix} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix}$$

$$(1.2)\ \begin{matrix} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{matrix} \quad (1.2.1)\ \begin{matrix} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{matrix}$$

Satz 1.1

Seien *a*, *b*, *c*, *d*, *e* und *f* reelle Zahlen. Sei $\Delta(a,b,c,d)=ad-bc$ und L die Lösungsmenge des lin. Gleichungssystems (1.1).
Dann gilt:
1.a) Für $(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$ und $(e,f)\neq(0,0)$ ist $L=\emptyset$
1.b) Für $(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$ und $(e,f)=(0,0)$ gilt:

$$L=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^2$$

2.a) i) Für $(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$ und $a\neq 0$ gilt im Falle $\Delta(a,b,c,d)=0$ und $\Delta(a,e,c,f)=0$:

$$L=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{a}(e-bt) \\ t \end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}$$

2.a) ii) Für $\Delta(a,b,c,d)=0$ und $\Delta(a,e,c,f)\neq 0$ ist $L=\emptyset$
2.b) Für $\Delta(a,b,c,d)\neq 0$ ist

$$L=\left\{\begin{pmatrix} \frac{\Delta(e,b,f,d)}{\Delta(a,b,c,d)} \\ \frac{\Delta(a,e,c,f)}{\Delta(a,b,c,d)} \end{pmatrix}\right\}$$

Satz 1.2

Das homogene Gleichungssystem (1.2.1) besitzt stets die triviale Lösung $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.
Sind $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ Lösungen von (1.2.1) $\Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ ist Lösung von (1.2.1)
Ist $\boldsymbol{x}$ Lösung von (1.2.1) $\Rightarrow \forall c\in\mathbb{R}:\ c\cdot\boldsymbol{x}$ ist Lösung von (1.2.1)

Satz 1.3

Man erhält sämtliche Lösungen des inhomog. Gleichungssystems (1.1.1), indem man zu einer speziellen Lösung von (1.1.1) alle Lösungen des zugehörigen homog. Systems (1.2.1) addiert.

Satz 1.4

Sei $C=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(m,n;\mathrm{K})$ mit $C \neq \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$.

Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq min\{m,n\}$ und ganze Zahlen $j_1, \dots, j_r$ mit $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_r \leq n$, so dass C durch mehrfaches Anwenden elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix D der Gestalt

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & j_1 & & & & j_2 & & & & j_r & & & \end{matrix} \\
D= & \begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
0 & \dots & & 0 & & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & & 0 & & \dots & & 0 & & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\
0 & \dots & & 0 & & \dots & & 0 & & \dots & & 0 & & \dots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & & 0 & & \dots & & 0 & & \dots & & 0 & & \dots & 0
\end{pmatrix}
\begin{matrix} 1. \\ 2. \\ \\ r. \\ (r+1). \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

überführt wird.

Folgerung 1.5

Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

lässt sich durch elementare Umformungen und geeigneter Umnummerierung der Variablen in ein äquivalentes System

$$\begin{array}{r} x_1 + \dots + d_{1\,k+1}x_{k+1} + d_{1n}x_n = b'_1 \\ \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_k + d_{k\,k+1}x_{k+1} + d_{kn}x_n = b'_k \\ 0 = b'_{k+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_m \end{array}$$

überführen.

Folgerung 1.6

Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbestimmten und mit $m<n$ ist stets nichttrivial lösbar.

Folgerung 1.7

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbestimmten und $m=n$, dessen zugehöriges homogenes Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, besitzt genau eine Lösung.

§2. Vektorräume

Definition 2.1

Sei M eine nichtleere Menge. Unter einer Verknüpfung $\circ$ auf M versteht man eine Vorschrift, durch die jedem Paar $(a, b) \in \mathrm{M} \times \mathrm{M}$ ein Element $a \circ b \in \mathrm{M}$ zugeordnet wird.

Definition 2.2

Sei G eine nichtleere Menge. Sei $\circ$ eine Verknüpfung auf G.
Das Paar $(\mathrm{G}, \circ)$ heißt Gruppe
$\Leftrightarrow$

1. $\circ$ ist assoziativ: $\forall a, b, c \in \mathrm{G}: \ a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
2. Existenz eines (links-)neutralen Elements:
   $\exists e \in \mathrm{G}: \ \forall a \in \mathrm{G}: \ e \circ a = a$
3. Existenz eines (links-)inversen Elements:
   $\exists e \in \mathrm{G}: \ \forall a \in \mathrm{G}: \ \exists a' \in \mathrm{G}: \ a \circ a' = e$

Gilt zusätzlich

4. $\forall a, b \in G: \ a \circ b = b \circ a$,

dann heißt $(\mathrm{G}, \circ)$ abelsche/kommutative Gruppe.

Lemma 2.3

Sei $(\mathrm{G}, \circ)$ eine Gruppe.
Dann gilt:

1. $\exists e \in \mathrm{G}: \ \forall a \in \mathrm{G}: \ a \circ e = a$ (rechtsneutrales Element)
2. $\exists e \in \mathrm{G}: \ \forall a \in \mathrm{G}: \ \exists a' \in \mathrm{G}: \ a' \circ a = e$ (rechtsinverses Element)
3. Das Element *e* in Def. 2.2. 2. ist eindeutig bestimmt.
4. Zu jedem $a \in \mathrm{G}$ ist das Element a' nach 2.2. 3. eindeutig bestimmt: $a' := a^{-1}$
5. $\forall a \in \mathrm{G}: \ (a^{-1})^{-1} = a$
   $\forall a, b \in \mathrm{G}: \ (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$
6. $\forall a, b \in \mathrm{G}$ gilt: die Gleichungsn $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ sind eindeutig lösbar.

Definition 2.4

Seien M_1 und M_2 zwei nichtleere Mengen. Eine Zuordnung $f: \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$, welche jedem Element $x \in \mathrm{M}_1$ genau ein Element $f(x) \in \mathrm{M}_2$ zuordnet, heißt Abbildung *f* von M_1 in M_2.

Definition 2.5

Sei K eine nichtleere Menge. Auf K seien zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert.
Das Tripel $(\mathrm{K},+,\cdot)$ heißt Körper
$\Leftrightarrow$
1. $(\mathrm{K},+)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0.
2. $(\mathrm{K}\setminus\{0\},\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralem Element 1.
3. Es gelten die Distributivgesetze:
   $\forall\, a,b,c\in\mathrm{K}:\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
   $\qquad\qquad\qquad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

Lemma 2.6

Sei $(\mathrm{K},+,\cdot)$ ein Körper. Dann gilt:
1. $\forall\, a\in\mathrm{K}:\ a\cdot 0=0\cdot a=0$
2. $\forall\, a\in\mathrm{K}:\ 1\cdot a=a\cdot 1=a$
3. Die Gleichung $a\cdot b=0$ impliziert: $a=0\vee b=0$
4. $\forall\, a\in\mathrm{K}:\ -a=(-1)\cdot a$

Definition 2.7

Sei $(\mathrm{V},+)$ eine abelsche Gruppe und $(\mathrm{K},+,\cdot)$ ein Körper.
Das Quadrupel $(\mathrm{V},\mathrm{K},\oplus,\odot)$ heißt K-Vektorraum
$\Leftrightarrow$
1. $\forall\, a,b\in\mathrm{K},\forall\,\boldsymbol{v}\in\mathrm{V}:\ (a\cdot b)\odot\boldsymbol{v}=a\odot(b\odot\boldsymbol{v})$
2. $\forall\,\boldsymbol{v}\in\mathrm{V}:\ 1\odot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$
3. $\forall\, a\in\mathrm{K}:\ \forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathrm{V}:\ a\odot(\boldsymbol{v}\oplus\boldsymbol{w})=(a\odot\boldsymbol{v})\oplus(a\odot\boldsymbol{w})$
4. $\forall\, a,b\in\mathrm{K}:\ \forall\,\boldsymbol{v}\in V:\ (a+b)\odot\boldsymbol{v}=(a\odot\boldsymbol{v})\oplus(b\odot\boldsymbol{v})$

Zur Unterscheidung:
- $\odot:\mathrm{K}\times\mathrm{V}\to\mathrm{V}$ Multiplikation eines Vektors aus V mit einem Skalar aus K
- $\oplus:\mathrm{V}\times\mathrm{V}\to\mathrm{V}$ Addition zweier Vektoren aus V
- $\cdot:\mathrm{K}\times\mathrm{K}\to\mathrm{K}$ Multiplikation zweier Skalare aus K
- $+:\mathrm{K}\times\mathrm{K}\to\mathrm{K}$ Addition zweier Skalare aus K

Im weiteren Verlauf wird der Unterschied zwischen $\odot$ und $\cdot$ bzw. $\oplus$ und $+$ nur noch in speziellen Einzelfällen berücksichtigt.

Satz 2.8

Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt:
1. $\forall\,\boldsymbol{v}\in\mathrm{V}:\ 0\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$
   $\forall\, a\in\mathrm{K}:\ a\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$
2. $\forall\, a\in\mathrm{K},\forall\,\boldsymbol{v}\in\mathrm{V}:\ (-a)\cdot\boldsymbol{v}=-(a\cdot\boldsymbol{v})=a\cdot(-\boldsymbol{v})$
   insbesondere gilt: $(-1)\cdot\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$
3. $a\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\ \Leftrightarrow\ a=0\vee\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$
4. $\forall\, a\in\mathrm{K},\forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathrm{V}:\ a\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})=a\cdot\boldsymbol{w}-a\cdot\boldsymbol{w}$

Definition 2.9

Sei V ein K-Vektorraum.

1. Sei $U \subset V$
   U heißt bei den linearen Operationen abgeschlossen, wenn gilt:
   $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U: \ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in U$ und
   $\forall c \in K, \forall \boldsymbol{u} \in U: \ c \cdot \boldsymbol{u} \in U$
2. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt K-Unterraum von V, wenn gilt:
   $(U, K, +, \cdot)$ ist selbst wieder ein Vektorraum.

Folgerung 2.10

Sei $U \subset V$ eine Teilmenge des K-Vektorraums V. Dann gilt:
U ist Unterraum von V $\Leftrightarrow$ $U \neq \emptyset$ und U ist bei den linearen Operationen abgeschlossen

Lemma 2.11

Sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Unterräume von V.
Dann gilt:

1. $U_1 \cap U_2$ ist Unterraum von V.
2. $U_1 + U_2 := \{\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} \mid \boldsymbol{u_1} \in U_1, \boldsymbol{u_2} \in U_2\}$ ist Unterraum von V.

Allgemeiner:
Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen von V, dann gilt:

1. $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist Unterraum von V.
2. $U_i + U_j$ mit $i, j \in I$ ist Unterraum von V.

Folgerung 2.12

Sei $M \subset V$ eine Teilmenge des K-Vektorraums V. Dann ist der Durchschnitt der Unterräume U von V, welche M enthalten, ein Unterraum von V. Diesen Unterraum nennt man den von M erzeugten Unterraum $\langle M \rangle$. M heißt hier deswegen Erzeugendensystem von $\langle M \rangle$.

§3. Linearkombinationen, Basen

Definition 3.1

Sei I eine endliche Menge (Indexmenge) und V ein K-Vektorraum. Die Abbildung

$$f: I \to \mathrm{V}$$
$$i \to f(i) = \boldsymbol{v_i}$$

bezeichne mit $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V.

Definition 3.2

Sei V ein K-Vektorraum.

1. Sei $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V.
   Ein Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$ heißt Linearkombination von $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$
   $\Leftrightarrow$ es gibt eine endliche Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ und Elemente $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{K}$, so dass gilt:
   $\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{v_{i_1}} + \ldots + c_n \boldsymbol{v_{i_n}}$
2. Sei $\mathrm{M} \neq \emptyset$ eine Teilmenge von V.
   Ein Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$ heißt Linearkombination von M
   $\Leftrightarrow$ es gibt endlich viele Vektoren $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in \mathrm{M}$ und Elemente $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{K}$, so dass gilt:
   $\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{v_1} + \ldots + c_n \boldsymbol{v_n}$

Satz 3.3

Sei M eine nichtleere Teilmenge des K-Vektorraums V. Dann besteht $\langle \mathrm{M} \rangle$ genau aus den Linearkombinationen von M.

Definition 3.4

Sei V ein K-Vektorraum und $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ Vektoren aus V.

1. $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ heißen linear unabhängig (über K)
   $\Leftrightarrow$ $\forall\, c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{K}$ mit $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$:
   $c_1 \boldsymbol{v_1} + \ldots + c_n \boldsymbol{v_n} \neq \boldsymbol{0}$
   [oder: $c_1 \boldsymbol{v_1} + \ldots + c_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_n = 0$]
2. $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ heißen linear abhängig
   $\Leftrightarrow$ $\exists\, c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{K}$ mit $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$:
   $c_1 \boldsymbol{v_1} + \ldots + c_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$
   [oder: $\boldsymbol{0}$ ist nichttriviale Linearkombination von $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$]
   [oder: $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sind nicht linear unabhängig]

Definition 3.5

Sei V ein K-Vektorraum und $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V.

1. $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ heißt linear unabhängig (über K)
   $\Leftrightarrow$ für jede endliche Teilmenge $J \subset I$, etwa $J = \{j_1, \dots, j_n\}$, gilt:
   die Teilfamilie $(\boldsymbol{v_j})_{j \in J}$ ist linear unabhängig
2. $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ heißt linear abhängig.
   $\Leftrightarrow$ es gibt eine endliche Teilmenge $J \subset I$, etwa $J = \{j_1, \dots, j_n\}$, so dass gilt:
   die Teilfamilie $(\boldsymbol{v_j})_{j \in J}$ ist linear abhängig.

Lemma 3.6

Sei V ein K-Vektorraum und $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V. Dann gilt:

1. $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ ist linear abhängig
   $\Leftrightarrow$ $\exists i_0 \in I: \ \boldsymbol{v_{i_0}} \in \langle (\boldsymbol{v_i})_{i \in I \setminus \{i_0\}} \rangle$
2. $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ ist linear unabhängig
   $\Leftrightarrow$ entweder $I = \emptyset$
   oder jeder Vektor $\boldsymbol{v} \in (\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination von $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ darstellen.

Definition 3.7

Sei V ein K-Vektorraum und U ein Unterraum von V. Eine Familie $(\boldsymbol{u_i})_{i \in I}$ in U heißt Erzeugendensystem von U $\Leftrightarrow$ U = $\langle (\boldsymbol{u_i})_{i \in I} \rangle$.
U heißt endlich erzeugt $\Leftrightarrow$ U besitzt ein endliches Erzeugendensystem.

Definition 3.8

Sei V ein K-Vektorraum und $(\boldsymbol{v_i})_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V.
Für $J \subset I$ sei $(\boldsymbol{v_j})_{j \in J}$ die entsprechende Teilfamilie. Dann gilt:
$(\boldsymbol{v_j})_{j \in J}$ heißt maximale linear unabhängige Teilfamilie von $(\boldsymbol{v_j})_{j \in J}$
$\Leftrightarrow$

1. $(\boldsymbol{v_j})_{j \in J}$ ist linear unabhängig.
2. Für jede Teilmenge J' mit $J \subsetneq J' \subseteq I$ gilt: $(\boldsymbol{v_j})_{j \in J'}$ ist linear abhängig.

Lemma 3.9

Sei V ein K-Vektorraum, M ' eine Teilmenge von V und M eine maximale lin. unabhängige Teilmenge von M '. Dann gilt: $\langle M' \rangle = \langle M \rangle$.

Definition 3.10

Sei V ein K-Vektorraum und M eine Teilmenge von V.
M heißt Basis von V ⇔ M ist linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V.

Satz 3.11

Sei V ein K-Vektorraum und M eine Teilmenge von V.
Dann sind äquivalent:

1. M ist Basis von V.
2. M ist minimales Erzeugendensystem von V.
   (d.h. $\langle \mathrm{M} \rangle = \mathrm{V} \;\wedge\; \mathrm{M}' \subsetneq \mathrm{M} \;\Rightarrow\; \langle \mathrm{M}' \rangle \neq \mathrm{V}$)
3. M ist maximale linear unabhängig Teilmenge von V.
4. Für jedes Erzeugendensystem M ' von V mit $\mathrm{M} \subset \mathrm{M}'$ ist M maximale lin. unabhängige Teilmenge in M '.
5. Es gibt ein Erzeugendensystem M ' von V mit $\mathrm{M} \subset \mathrm{M}'$, so dass M maximale lin. unabhängige Teilmenge in M ' ist.

Ist zusätzlich $\mathrm{V} \neq \{\mathbf{0}\}$, so ist weiter äquivalent:

6. Jeder Vektor $\boldsymbol{v} \in$ V lässt sich eindeutig als Linearkombination von M darstellen.

Folgerung 3.12 (Basisauswählsatz)

Sei V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_s)$.
Dann gibt es eine Teilfamilie $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ von $(v_1, \ldots, v_s)$, die eine Basis von V ist.

Lemma 3.13 (Austauschlemma)

Sei V ein K-Vektorraum mit der endlichen Basis $\mathrm{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.
Sei $\boldsymbol{w} = w_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + w_n \boldsymbol{v}_n$ ($w_i \in$ K) ein Vektor in V mit $w_m \neq 0$.
Dann ist auch $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m-1}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ eine Basis von V.

Folgerung 3.14 (Austauschsatz von Steinitz)

Sei V ein K-Vektorraum mit der endlichen Basis $\mathrm{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.
Sei $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k\}$ eine lin. unabhängige Teilmenge von V. Dann gilt:

1. $k \leq n$
2. es gibt $i_1, \ldots, i_{n-k}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_{n-k} \leq n$, so dass $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_{n-k}}\}$ eine Basis von V ist.

<u>Definition 3.15</u>

Sei V ein K-Vektorraum. V heißt endlich erzeugt ⇔ V hat ein endliches Erzeugendensystem.

<u>Folgerung 3.16</u>

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann gilt:
1. V besitzt eine Basis mit endlich vielen Elementen.
2. Je zwei Basen B_1 und B_2 von V enthalten gleich viele Elemente.

<u>Definition 3.17</u>

Die nach Folgerung 3.16 eindeutig bestimmte Mächtigkeit einer Basis des K-Vektorraums V heißt Dimension von V (DimV).

<u>Folgerung 3.18</u>

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV = n ($<\infty$).
Dann gilt für jeden Unterraum U von V: DimU $\leq$ DimV.
Aus DimU = DimV folgt U = V.
(hier ist die Voraussetzung DimV = $n<\infty$ wesentlich!)

<u>Folgerung 3.19</u>

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV = n. Sei U ein Unterraum von V mit DimU = k.
Sei $\{\boldsymbol{v_1},\dots,\boldsymbol{v_n}\}$ eine Basis V und $\{\boldsymbol{u_1},\dots,\boldsymbol{u_k}\}$ eine Basis von U.
Dann lässt sich $\{\boldsymbol{u_1},\dots,\boldsymbol{u_k}\}$ durch Hinzunahme geeigneter Elemente $\boldsymbol{v}_{i_1},\dots,\boldsymbol{v}_{i_{n-k}}$ mit $1\leq i_1<\dots<i_{n-k}\leq n$ aus $\{\boldsymbol{v_1},\dots,\boldsymbol{v_n}\}$ zu einer Basis von V ergänzen.

<u>Satz 3.20</u> (Dimensionsformel)

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum sowie U_1 und U_2 Unterräume von V. Der Unterraum U_1+U_2 sei wie in 2.11 definiert.
Dann gilt: Dim(U_1+U_2) = DimU_1 + DimU_2 – Dim($U_1\cap U_2$)

<u>Folgerung 3.21</u>

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und U ein Unterraum von V.
Dann gibt es einen Unterraum W von V mit
1. U + W = V
2. $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$

Definition 3.22

Sei V ein *n*-dimensionaler K-Vektorraum sowie U und W zwei Unterräume von V.
V heißt direkte Summe aus U und W (V = U ⊕ W)
⇔
1. U + W = V
2. $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$

Satz 3.23

Sei V ein *n*-dimensionaler K-Vektorraum mit zwei Unterräumen U und W.
Dann sind äquivalent:
1. V = U ⊕ W
2. jedes Element $\boldsymbol{v} \in$ V lässt sich in eindeutiger Weise als $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{u} \in$ U und $\boldsymbol{w} \in$ W darstellen.
3. V = U + W und DimV = DimU + DimW
4. $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ und DimV = DimU + DimW

Definition 3.24

Sei V ein *n*-dimensionaler K-Vektorraum. Sei F = $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ eine Familie von Vektoren aus V.
F hat den Rang *r* ⇔ der aus F erzeugte Unterraum $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ hat die Dimension *r*.

Definition 3.25

Sei $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ eine Familie von Vektoren aus dem K-Vektorraum V. Unter einer elementaren Umformung von $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ versteht man eine der drei folgenden Operationen:
1. Vertauschung zweier Vektoren des *m*-Tupels
2. Für *i*, *j* ($1 \le i, j \le m$) mit $i \neq j$:
   Ersetzen von $\boldsymbol{v}_i$ durch $\boldsymbol{v}_i + a \cdot \boldsymbol{v}_j$ ($a \in$ K)
3. Für *i* ($1 \le i \le m$):
   Ersetzen von $\boldsymbol{v}_i$ durch $a \cdot \boldsymbol{v}_i$ ($a \in K \setminus \{0\}$)

Lemma 3.26

Der Rang eines *m*-Tupels von Vektoren ändert sich bei elementaren Umformungen nicht.

Satz 3.27

Sei V ein endlichdim. K-Vektorraum mit Basis $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$.
Sei $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ ein m-Tupel von Vektoren aus V.
Dann lässt sich $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ durch Anwendung elementarer Umformungen und ggf. nach geeigneter Umnummerierung der Basis $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ in ein m-Tupel $(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_m)$ überführen, welches bzgl. $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ eine Koordinatenmatrix der Form

$$\begin{array}{c} \\ 1. \\ \\ r. \\ (r+1). \\ \\ (m-r). \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1. & & r. & (r+1). & & (n-r). \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ besitzt.}$$

Es gilt ferner: $\operatorname{Rang}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = r$.

Definition 3.28

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(m, n; \mathrm{K})$.

Seien $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in K^m$ die Spaltenvektoren und $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m \in K^n$ die Zeilenvektoren in A.
Dann heißt $\operatorname{Rang}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ Spaltenrang und $\operatorname{Rang}(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$ Zeilenrang von A.
Analog zu 3.25 gilt: der Spaltenrang ist bei elementaren Spaltenumformungen invariant.

Lemma 3.29

Sei $A \in \mathfrak{M}(m, n; K)$. Dann gilt:
Der Zeilen- und Spaltenrang von A ändert sich bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen nicht.

Satz 3.30

Jede Matrix $A \in \mathfrak{M}(m, n; K)$ lässt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in eine Matrix der Gestalt

$$\begin{array}{c} \\ 1. \\ \\ r. \\ (r+1). \\ \\ (m-r). \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1. & & r. & (r+1). & & (n-r). \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ überführen.}$$

Dabei gilt: $0 \le r \le \min\{m, n\}$
Spalten- und Zeilenrang von A stimmen überein. Der gemeinsame Wert ist Rang(A) = r und heißt Rang von A.

Satz 3.31

Das inhomog. lineare Gleichungssystem

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \text{ ist lösbar} \Leftrightarrow \text{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

d.h. wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt.

§4. Lineare Abbildungen

Definition 4.1

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine Abbildung.
φ heißt (K-)linear $\Leftrightarrow$
1. $\forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathrm{V}: \ \varphi(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{v}) + \varphi(\boldsymbol{w})$
2. $\forall\, \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}, \forall\, \alpha \in \mathrm{K}: \ \varphi(\alpha \cdot \boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \varphi(\boldsymbol{v})$

Lemma 4.2

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine Abbildung. Dann gilt:
φ ist linear $\Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in \mathrm{V}, \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{K}:$

$$\varphi(\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2}) = \alpha_1 \varphi(\boldsymbol{v_1}) + \alpha_2 \varphi(\boldsymbol{v_2})$$

Ist φ weiterhin linear, dann gilt:

$$\varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \text{ und } \varphi(-\boldsymbol{v}) = -\varphi(\boldsymbol{v})$$

Lemma 4.3

Seien U, V und W drei K-Vektorräume. Seien $\varphi: \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ und $\psi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ lineare Abbildungen.
Dann ist auch $\psi(\varphi) = \psi \circ \varphi: \mathrm{U} \to \mathrm{W}$ linear.

Definition 4.4

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine lin. Abbildung.
φ heißt Isomorphismus $\Leftrightarrow$ φ ist bijektiv
V und W heißen isomorph ($\mathrm{V} \cong \mathrm{W}$) $\Leftrightarrow$ es gibt einen Isomorphismus $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$

Satz 4.5

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n.
Dann ist V zu K^n isomorph ($\mathrm{V} \cong \mathrm{K}^n$).
Seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume. Dann gilt:

$$\mathrm{V} \cong \mathrm{W} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Dim}\mathrm{V} = \mathrm{Dim}\mathrm{W}$$

Satz 4.6

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n})$. Sei W ein beliebiger K-Vektorraum.
Dann gilt:
Zu jedem n-Tupel von Vektoren $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n})$ in W gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ mit $\varphi(\boldsymbol{b_i}) = \boldsymbol{a_i} \ \ (i = 1, \dots, n)$.

Lemma 4.7

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Sei $\mathrm{M} \subset \mathrm{V}$ eine Teilmenge von V. Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine lin. Abbildung.
Dann gilt: $\varphi(\langle \mathrm{M} \rangle) = \langle \varphi(\mathrm{M}) \rangle$
Insbesondere gilt:

- Das Bild $\varphi(\mathrm{U})$ eines Unterraums U von V ist ein Unterraum in W.
  Ist U endlichdimensional, so gilt: $\mathrm{Dim}\mathrm{U} \geq \mathrm{Dim}\varphi(\mathrm{U})$
- Das Urbild $\varphi^{-1}(\mathrm{U}')$ eines Unterraums U ' von W ist ein Unterraum in V.

Definition 4.8

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine lin. Abbildung.
Dann heißt

- $\varphi^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ Kern von φ (Kernφ), für das gilt:
  $\mathrm{Kern}\varphi := \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{V} \mid \varphi(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$,
- $\{\boldsymbol{w} \in \mathrm{W} \mid \exists \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}: \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$ Bild von φ (Bildφ),
- Dim(Kernφ) Defekt von φ (Defφ) oder Corang (Corangφ) von φ,
- Dim(Bildφ) Rang von φ (Rangφ).

Falls $\mathrm{Dim}\mathrm{W} < \infty$: $\mathrm{Rang}\,\varphi \leq \mathrm{Dim}\mathrm{W}$

Falls $\mathrm{Dim}\mathrm{V} < \infty$: $\mathrm{Rang}\,\varphi \leq \mathrm{Dim}\mathrm{V}$

$$\mathrm{Rang}\,\varphi \leq \min\{\mathrm{Dim}\mathrm{V}, \mathrm{Dim}\mathrm{W}\}$$

Satz 4.9

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine lin. Abbildung.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. φ ist surjektiv
2. Ist B eine Basis von V, so gilt $\langle \varphi(\mathrm{B}) \rangle = \mathrm{W}$

Ist zusätzlich W endlichdim., so ist zusätzlich äquivalent:

3. Rangφ = Dim(Bildφ) = DimW

Folgerung 4.10

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Gelte DimV=n. Sei $\mathrm{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V.
Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine lin. Abbildung.
Dann gilt:

$$\mathrm{Rang}\varphi = \mathrm{Rang}(\varphi(\boldsymbol{b}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{b}_n))$$

<u>Satz 4.11</u>

Seien V und W zwei K-Vektorräume.Sei $\varphi : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$ eine lin. Abbildung.
Dann sind äquivalent:

1. φ ist injektiv
2. Kernφ=$\{\mathbf{0}\}$
3. Ist B eine Basis von V, so ist $(\varphi(\boldsymbol{b}))_{\boldsymbol{b} \in \mathrm{B}}$ lin. unabhängig

Ist zusätzlich V endlichdim., so ist zusätzlich äquivalent:

4. Rangφ = Dim(Bildφ) = Dim V

<u>Satz 4.12</u> (Dimensionsformel für lin. Abbildungen)

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Gelte DimV=n. Sei $\varphi : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$ linear.
Dann gilt:

Bildφ und Kernφ haben endliche Dimension und
DimV = Dim(Bildφ) + Dim(Kernφ)   (= Rangφ + Defφ)

<u>Folgerung 4.13</u>

Seien V und W zwei K-Vektorräume mit DimV = DimW = n. Sei $\varphi : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$ linear.
Dann sind äquivalent:

1. φ ist ein Isomorphismus
2. φ ist surjektiv
3. φ ist injektiv

§5. Lineare Abbildungen & Matrizen

Definition 5.1

Seien V und W zwei K-Vektorräume mit DimV=n und DimW=m. Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine lin. Abbildung. Sei B=$(\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ Basis von V und C=$(\boldsymbol{c_1}, \ldots, \boldsymbol{c_m})$ Basis von W.
Dann heißt die nach folgender Regel gebildete $m \times n$-Matrix A mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathrm{K}$ Koordinaten-matrix von φ bzgl. B und C:

lt. Satz 4.6: φ ist eindeutig bestimmt durch die Werte auf der Basis B:
$\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \in \mathrm{W}: \ \varphi(\boldsymbol{b_i}) = \boldsymbol{a_i} \ \ (i = 1, \ldots, n)$

Bzgl. Basis C dargestellt, ergibt dies den Term:
$\varphi(\boldsymbol{b_i}) = \boldsymbol{a_i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \boldsymbol{c_j}$ (mit eindeutig bestimmten $a_{ji} \in \mathrm{K}$)

φ führt zur Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Anmerkung: In A sind die Spaltenvektoren aus Spalte i genau die Koordinatenvektoren der Elemente $\boldsymbol{a_i}$ bzgl. der Basis C.

Lemma 5.2

$\mathfrak{M}(m,n;\mathrm{K})$ bildet einen Vektorraum der Dimension $m \cdot n$ über K.

Definition 5.3

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Dann bezeichnet man mit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ die Menge der K-linearen Abbildungen (Homomorphismen) $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$.

Lemma 5.4

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ trägt in natürlicher Weise die Struktur eines K-Vektorraums.

Satz 5.5

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Sei B=$(\boldsymbol{b_1},\dots,\boldsymbol{b_n})$ Basis von V und C=$(\boldsymbol{c_1},\dots,\boldsymbol{c_m})$ Basis von W. Sei F eine Zuordnung, die einem Element $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ die Koordinatenmatrix A von φ bzgl. B und C zuordnet.
Dann gilt:

F ist ein Isomorphismus zwischen $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $\mathfrak{M}(m,n;K)$.

Lemma 5.6

Sei $\alpha: K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. α habe bzgl. $(\boldsymbol{e_1},\dots,\boldsymbol{e_n})$ und $(\boldsymbol{e'}_1,\dots,\boldsymbol{e'}_m)$ die Matrix

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ und $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in K^m$:

$$\alpha(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow\; y_i=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j)\ (i=1,\dots,n)$$

$$\alpha(\boldsymbol{x}) = A\cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}$$

Definition 5.7

Seien l, m, n natürliche Zahlen. Seien $A \in \mathfrak{M}(m,n;K)$ und $B \in \mathfrak{M}(l,m;K)$ Matrizen mit den zugehörigen Abbildungen $\alpha: K^n \to K^m$ und $\beta: K^m \to K^l$.
Dann ist die Matrix $B\cdot A \in \mathfrak{M}(l,n;K)$ definiert als die Koordinatenmatrix der Abbildung $\alpha\circ\beta: K^n \to K^l$ bzgl. der kanonischen Basen.

Satz 5.8

Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$. Sei $A=(\alpha_{pq})_{\substack{1\le p\le m\\ 1\le q\le n}} \in \mathfrak{M}(m,n;K)$. Sei $B=(\beta_{rs})_{\substack{1\le r\le l\\ 1\le s\le m}} \in \mathfrak{M}(l,m;K)$.
Dann ist das nach 5.7 definierte Produkt $B\cdot A=C=(\gamma_{ij})_{\substack{1\le i\le l\\ 1\le j\le n}} \in \mathfrak{M}(l,n;K)$ gegeben durch

$$\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\beta_{ik}\cdot\alpha_{kj} \text{ für } 1\le i\le l,\ 1\le j\le n$$

Beim Produkt $B\cdot A$ ist wesentlich:
Anzahl der Zeilen in A = Anzahl der Spalten in B !

Folgerung 5.9

Seien U, V und W drei K-Vektorräume mit DimU=n, DimV=m, DimW=l.
Seien $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b_1},\dots,\boldsymbol{b_n})$, $\mathcal{C}=(\boldsymbol{c_1},\dots,\boldsymbol{c_m})$ und $\mathcal{D}=(\boldsymbol{d_1},\dots,\boldsymbol{d_l})$ jeweils Basen von U, V und W.
Seien $\varphi: U\to V$ und $\psi: V\to W$ zwei lineare Abbildungen. Die Koordinatenmatrix von φ bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sei A, die von ψ bzgl. $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sei B.
Dann gilt:
$B\cdot A$ ist die Koordinatenmatrix von $\psi\circ\varphi: U\to W$ bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}$.

Folgerung 5.10

Seien V und W zwei K-Vektorräume mit DimV = n = DimW.
Seien $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b_1},\dots,\boldsymbol{b_n})$ und $\mathcal{C}=(\boldsymbol{c_1},\dots,\boldsymbol{c_n})$ Basen von V bzw. W. Sei $\varphi: V\to W$ linear mit der Koordinatenmatrix $A\in\mathfrak{M}(n;K)$ bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.
Dann sind äquivalent:
1. φ ist ein Isomorphismus
2. zu A gibt es eine Matrix $A^{-1}\in\mathfrak{M}(n;K)$ mit $A\cdot A^{-1}=\mathbb{E}_n=A^{-1}\cdot A$ mit

   der n-reihigen Einheitsmatrix $\mathbb{E}_n=\begin{pmatrix}1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

Ist eine der Aussagen 1. oder 2. erfüllt, so ist A^{-1} die Koordinatenmatrix von $\varphi^{-1}: W\to V$ bzgl. $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$.

Satz 5.10

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum mit den Basen $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)$ und $\hat{\mathcal{B}}=(\hat{\boldsymbol{b}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{b}}_n)$.
Sei W ein m-dim. K-Vektorraum mit den Basen $\mathcal{C}=(\boldsymbol{c}_1,\ldots,\boldsymbol{c}_n)$ und $\hat{\mathcal{C}}=(\hat{\boldsymbol{c}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{c}}_n)$.
Sei B die Übergangsmatrix von nach $\mathcal{B}$ nach $\hat{\mathcal{B}}$ und C die Übergangsmatrix von $\mathcal{C}$ nach $\hat{\mathcal{C}}$.
Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ linear mit A als Koordinatenmatrix bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ und $\hat{A}$ als Koordinatenmatrix bzgl. $\hat{\mathcal{B}}$ und $\hat{\mathcal{C}}$.
Dann gilt:

$$\hat{A}=C^{-1}\cdot A\cdot B \text{ und } A=C\cdot\hat{A}\cdot B^{-1}$$

Folgerung 5.12

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Seien $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)$ und $\hat{\mathcal{B}}=(\hat{\boldsymbol{b}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{b}}_n)$ Basen von V.
Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ ein Endomorphismus von V mit Koordinatenmatrix A bzgl. $\mathcal{B}$.
Sei B die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\hat{\mathcal{B}}$.
Dann hat φ bzgl. $\hat{\mathcal{B}}$ die Koordinatenmatrix $B^{-1}\cdot A\cdot B$ (Konjugation).

Speziell gilt: Sei $A \in \mathfrak{M}(n;\mathrm{K})$ und $\mathcal{S}=(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n)$ eine Basis des K^n.
Dann hat der von A induzierte Endomorphismus von K^n bzgl. $\mathcal{S}$ die Koordinatenmatrix $S^{-1}\cdot A\cdot S$, wobei S die Matrix mit den Spalten $\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n$ sei.

Definition 5.13 (Ringe)

Sei R eine Menge mit den Verknüpfungen + und $\cdot$.
Das Tripel $(\mathrm{R},+,\cdot)$ heißt Ring mit Eins
$\Leftrightarrow$

1. $(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0.
2. $\cdot$ ist assoziativ, d.h. $\forall\, a,b,c \in \mathrm{R}:\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
3. $\exists\, 1 \in \mathrm{R}$ mit $1\neq 0:\ 1\cdot a=a\cdot 1=a\ (\forall\, a \in \mathrm{R})$
4. Es gelten die Distributivgesetze:
   $\forall\, a,b,c \in \mathrm{R}:\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
   $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

Im Allgemeinen ist $\cdot$ nicht kommutativ. Falls $\cdot$ kommutativ ist, so heißt R ein kommutativer Ring mit Eins.

Folgerung 5.14

Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist $\mathrm{End}_\mathrm{K}(\mathrm{V})$ mit der Addition und Hintereinanderausführung von Endomorphismen ein Ring mit Eins $(\mathrm{End}_\mathrm{K}(\mathrm{V}),+,\circ)$.

Definition 5.15

Sei R ein Ring mit Eins. Ein Element $a \in$ R heißt
- linksinvertierbar $\Leftrightarrow \exists b \in \mathrm{R}: \; b \cdot a = 1$,
- rechtsinvertierbar $\Leftrightarrow \exists b \in \mathrm{R}: \; a \cdot b = 1$,
- invertierbar $\Leftrightarrow \exists b \in \mathrm{R}: \; a \cdot b = b \cdot a = 1$

  Invertierbare Elemente heißen auch Einheiten.
  Zu beachten: 0 ist nicht invertierbar! $\forall a \in \mathrm{R}: \; a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \neq 1$

  Die Menge der invertierbaren Elemente in R heißt Einheitengruppe.

Lemma 5.16

Sei V ein K-Vektorraum. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gilt:
φ ist eine Einheit in $\mathrm{End}_K(V)$ $\Leftrightarrow$ φ ist ein Automorphismus[1)] von V.

[1)] Automorphismen sind bijektive Endomorphismen bzw. Isomorphismen in sich.

Definition 5.17

Sei R ein Ring mit Eins. Ein Element $a \in$ R heißt
- Linksnullteiler $\Leftrightarrow \exists b \in \mathrm{R} \setminus \{0\}: \; a \cdot b = 0$
- Rechtsnullteiler $\Leftrightarrow \exists b \in \mathrm{R} \setminus \{0\}: \; b \cdot a = 0$

In einem Körper K gilt stets nach Lemma 2.6: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
Dieser Schluss ist in einem Ring im Allgemeinen falsch!

Lemma 5.18

Sei R ein Ring mit Eins. Sei $a \in$ R linksinvertierbar (rechtsinvertierbar). Dann folgt:
a ist kein Linksnullteiler (Rechtsnullteiler) in R.

Satz 5.19

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\varphi \neq 0$ (Nullabbildung).
Dann sind äquivalent:
1. $\mathrm{Rang}\varphi < n$
2. φ ist Rechtsnullteiler in $\mathrm{End}_K(V)$
3. φ ist Linksnullteiler in $\mathrm{End}_K(V)$

(hier ist die Voraussetzung DimV = $n < \infty$ wesentlich!)

Satz 5.20

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann sind äquivalent:

1. φ ist ein Automorphismus
2. φ ist Einheit in $\mathrm{End}_K(V)$
3. $\exists \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_V$
4. $\exists \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$
5. $\varphi \neq 0$ und φ ist kein Nullteiler in $\mathrm{End}_K(V)$
6. $\mathrm{Rang}\varphi = n$
7. φ ist surjektiv
8. φ ist injektiv

Folgerung 5.21

Sei $A \in \mathfrak{M}(n;K)$. Dann sind äquivalent:

1. A induziert einen Automorphismus $\alpha : K^n \to K^n$
2. A ist invertierbar in $\mathfrak{M}(n;K)$
3. $\exists B \in \mathfrak{M}(n;K)$ mit $A \cdot B = \mathbb{E}_n$
4. $\exists B \in \mathfrak{M}(n;K)$ mit $B \cdot A = \mathbb{E}_n$
5. $A \neq \mathbb{O}$ und A ist kein Nullteiler in $\mathfrak{M}(n;K)$
6. $\mathrm{Rang}A = n$
7. A induziert einen surjektiven Endomorphismus $\alpha : K^n \to K^n$
8. A induziert einen injektiven Endomorphismus $\alpha : K^n \to K^n$

Ist A invertierbar ($\mathrm{Rang}A = n$), so heißt A nichtsingulär.
Ist A singulär ($\mathrm{Rang}A < n$), so ist A nicht invertierbar.

Definition 5.22

Die Einheitengruppe im Ring $\mathrm{End}_K(V)$ heißt allgemeine lineare Gruppe des K-Vektorraums V $\mathrm{GL}_K(V)$.
Für $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{GL}(n;K) \coloneqq \mathrm{GL}_K(K^n)$

Lemma 5.23

Sei $A \in \mathfrak{M}(n;K)$. A sei invertierbar. Dann lässt sich A durch sukzessives Anwenden elementarer Zeilenumformungen in die $n \times n$-Einheitsmatrix $\mathbb{E}_n$ überführen.

§6. Permutationen

Satz 6.1

$\mathcal{S}_n$ hat $n!$ Elemente.

Satz 6.2

Sei $n \geq 2$. Dann lässt sich jedes Element $\varphi \in \mathcal{S}_n$ als Produkt von Transpositionen schreiben.

Definition 6.3

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
Ein Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ heißt Fehlstandspaar für $\sigma \Leftrightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$.
Für $\sigma \in \mathcal{S}_n$ heißt die Anzahl $\mathrm{F}(\sigma)$ der Fehlstandspaare für σ die Fehlstandszahl von σ.

σ heißt gerade $\Leftrightarrow$ $\mathrm{F}(\sigma)$ ist gerade
σ heißt ungerade $\Leftrightarrow$ $\mathrm{F}(\sigma)$ ist ungerade.

Die Funktion $\mathrm{sign}(\sigma) := (-1)^{\mathrm{F}(\sigma)}$ heißt Signumfunktion mit $\mathrm{sign}: \mathcal{S}_n \to \{-1; 1\}$

Lemma 6.4

Für $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gilt:

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Satz 6.5

Seien $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$. Dann gilt:

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\tau)$$

Insbesondere gilt:

$$\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(\sigma)$$

Folgerung 6.6

Ist $\tau \in \mathcal{S}_n$ eine Transposition, so gilt:

$$\mathrm{sign}(\tau) = -1$$

Gilt für $\sigma \in \mathcal{S}_n$ die Darstellung $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ mit Transpositionen $\tau_\kappa (\kappa = 1, \ldots, k)$, so folgt:

$$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^k$$

§7. Determinanten

Sei $f: \mathrm{V}^n \to \mathrm{K}$ im Folgenden eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(H) Homogenität in jedem Argument:
$\forall\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathrm{V}, \forall\, a \in \mathrm{K}:$
$f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, a \cdot \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = a \cdot f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \quad \forall\, i\,(1 \le i \le n)$

(S) Scherungsinvarianz:
$\forall\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathrm{V}:$
$f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \quad \forall\, i, j\,(1 \le i, j \le n, i \ne j)$

Satz 7.1

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Sei $f: \mathrm{V}^n \to \mathrm{K}$ eine Abbildung, die (H) und (S) erfülle. Dann gilt:

1. $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = 0$
2. $\forall\, i, j\,(i \ne j), \forall\, a \in \mathrm{K}:$
   $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + a \cdot \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$
3. $\forall\, i, \forall\, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in \mathrm{K}:$
   $$f\Big(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \ne i)}}^{n} a_j \cdot \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n\Big) = f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$
4. Sind $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ linear abhängig $\Rightarrow f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = 0$
5. f ist additiv in jedem Argument:
   $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) + f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_n)$
6. f ist in jedem Argumentenpaar alternierend:
   $\forall\, i, j\,(1 \le i, j \le n, i \ne j):$
   $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$
7. Sei f<>0 (Nullabbildung)
   Dann gilt für linear unabhängige $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathrm{V}: f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \ne 0$

Definition 7.2

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Sei $f: \mathrm{V}^n \to \mathrm{K}$ eine Abbildung.

1. f heißt n-fache Linearform $\Leftrightarrow f$ ist homogen und additiv in jedem Argument
   also $\forall\, \boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathrm{V}, \forall\, a \in \mathrm{K}:$
   $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, a \cdot \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = a \cdot f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ (Homogenität)
   $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) + f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ (Additivität)
2. f heißt alternierend $\Leftrightarrow \forall\, i, k\,(1 \le i, j \le n, i \ne j), \forall\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V:$
   $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$

Satz 7.3

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Sei $f: \mathrm{V}^n \to \mathrm{K}$ eine Abbildung.
Dann sind äquivalent:

1. f erfüllt (H) und (S).
2. f ist eine n-fache alternierende Linearform.

Satz 7.4

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Dann gilt:
Die Menge der n-fachen alternierenden Linearformen auf V^n bilden bei der üblichen Addition und der Skalarmultiplikation von K-wertigen Funktionen einen eindimensionalen Vektorraum über K.

Definition 7.5

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n.
Eine n-fache alternierende Linearform $D: \mathrm{V}^n \to \mathrm{K}$ mit $D \neq 0$ heißt Determinantenform (Determinantenfunktion).

Satz 7.6

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und Basis $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Dann gibt es zu jedem $a \in K^*$ genau eine Determinantenfunktion D auf V mit $D(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = a$.

Folgerung 7.7

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Sei D eine Determinantenform auf V.
Dann gilt für $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in V$:

$$D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ linear unabhängig.}$$

Definition 7.8

Unter einer natürlichen Determinantenform D_n auf K^n versteht man die nach 7.6 eindeutig bestimmte Determinantenform mit $D_n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$

Sind $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ Elemente aus K^n

$$\Rightarrow \quad D_n(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} sign\,\sigma \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{(Determinante von } \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\text{)}$$

Definition 7.9

Sei $A=(a_{ij})_{1\leq i,\, j\leq n} \in \mathfrak{M}(n;\mathrm{K})$. Dann heißt der Wert der natürlichen Determinantenfunktion D_n an den Argumenten $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, wobei die $\boldsymbol{a_i}$ die Spalten in A seien, die Determinante von A (Det$A$).

Definition 7.10

Sei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(m;n;\mathrm{K})$. Dann heißt $A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(n;m;\mathrm{K})$ die zu A transponierte Matrix.

Satz 7.11

Sei n eine natürliche Zahl. Sei $A \in \mathfrak{M}(n;\mathrm{K})$. Dann gilt: Det($A$) = Det($A^t$).

Satz 7.12

1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\cdot a_{i1} & \ldots & \lambda\cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \lambda\cdot a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \lambda\cdot a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & \ldots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & \ldots & a_{in}' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
   (analog mit der i-ten Spalte)
3. Ist in $A \in \mathfrak{M}(n;\mathrm{K})$ eine Spalte oder Zeile gleich Null, so folgt Det(A) = 0.
4. Ersetzt man in $A \in \mathfrak{M}(n;\mathrm{K})$ die i-te Zeile (Spalte) durch die Summe aus i-ter Zeile (Spalte) und λ-facher j-ter Zeile (Spalte), so ändert sich der Wert der Det. nicht.
5. Vertauscht man in $A \in \mathfrak{M}(n;\mathrm{K})$ zwei verschiedene Zeilen (Spalten), so ändert die Det. nur das Vorzeichen.
6. $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \;\Leftrightarrow\;$ die Spalten-(Zeilen-)Vektoren sind linear unabhängig.

Lemma 7.13

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definition 7.14

Sei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ∈ $\mathfrak{M}(n;K)$. Für $i, j\,(1 \le i, j \le n)$ bezeichne A_{ij} die aus A durch Streichen der *i*-ten Zeile und der *j*-ten Spalte entstehende $(n-1)\times(n-1)$-Matrix mit

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{1+1\,1} & \dots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lemma 7.15

Sei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ∈ $\mathfrak{M}(n;K)$. Dann gilt für alle $i, j\,(1 \le i, j \le n)$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1j} & & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \dots & & a_{i-1\,j} & & \dots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1\,1} & \dots & & a_{i+1\,j} & & \dots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{nj} & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{Det}(A_{ij})$$

Satz 7.16 (Einfacher Laplacescher Entwicklungssatz)

Für $i=1,\dots,n$ gibt die "Entwicklung nach der i-ten Zeile"

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \mathrm{Det}(A_{ij})$$

Für $j=1,\dots,n$ gibt die "Entwicklung nach der j-ten Spalte"

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \mathrm{Det}(A_{ij})$$

Satz 7.17 (Cramersche Regel)

Sei $(x_1,\dots,x_n)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $\begin{matrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{matrix}$.

Dann gilt $\forall i\,(1\le i\le n)$:

$$x_i \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ist $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, so ist das System eindeutig lösbar mit $x_i = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$

Lemma 7.18

Sei $D: \mathrm{V}^n \to \mathrm{K}$ eine Determinantenform auf V. Sei weiterhin $\varphi \in \mathrm{End}_\mathrm{K}(\mathrm{V})$.
Sei $D_\varphi: \mathrm{V}^n \to \mathrm{K}$ definiert durch $D_\varphi(\boldsymbol{a_1},\dots,\boldsymbol{a_n}) = D(\varphi(\boldsymbol{a_1}),\dots,\varphi(\boldsymbol{a_n}))$.
Dann ist D_φ eine n-fach alternierende Linearform.

Folgerung 7.19

Sei D eine Determinantenform auf V. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_\mathrm{K}(\mathrm{V})$.
Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $\gamma=\gamma(\varphi, D)$, so dass gilt:

$$D_\varphi = \gamma \cdot D$$

(d.h. $\forall\, \boldsymbol{b_1},\dots,\boldsymbol{b_n}:\; D_\varphi(\boldsymbol{b_1},\dots,\boldsymbol{b_n}) = \gamma \cdot D(\boldsymbol{b_1},\dots,\boldsymbol{b_n})$)

Satz 7.20

Der Faktor γ in 7.19 hängt <u>nur</u> von φ, nicht aber von D ab.

Folgerung 7.21

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $\gamma=\gamma(\varphi) \in K$ mit der Eigenschaft:
Ist D eine Determinantenform auf V, so gilt:
$\forall\, \boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n} \in V:\ \ D(\varphi(\boldsymbol{a_1}),\ldots,\varphi(\boldsymbol{a_n})) = \gamma\cdot D(\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_n})$
γ heißt die Determinante von φ ($\gamma = \mathrm{Det}\varphi$).

Satz 7.22

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann gilt: $\mathrm{Det}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Det}(\varphi) \cdot \mathrm{Det}(\psi)$.

Satz 7.23

$$\mathrm{Det}\varphi = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Satz 7.24

Seien $A, B \in \mathfrak{M}(n;K)$. Dann gilt: $\mathrm{Det}(A \cdot B) = \mathrm{Det}A \cdot \mathrm{Det}B$.
<u>Bemerkungen:</u>

- $\mathrm{Det}(\mathbb{E}_n) = 1$
- $\forall\, S \in GL(n;K)$: $\mathrm{Det}(S\cdot S^{-1}) = \mathrm{Det}(\mathbb{E}_n) = 1 = \mathrm{Det}(S) \cdot \mathrm{Det}(S^{-1})$

  $\Rightarrow \mathrm{Det}(S^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(S)} = \mathrm{Det}(S)^{-1}$

Satz 7.25

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann gilt: $\mathrm{Det}\varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi$ ist ein Automorphismus.

§8. Eigenwerte, Eigenvektoren

Definition 8.1

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n. und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ heißt Eigenvektor von $\varphi \Leftrightarrow$

1. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ und
2. $\exists \lambda \in K: \ \varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$.

Das Element λ heißt dann Eigenwert von φ und $\boldsymbol{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Bemerkungen / Beispiele:

1. $\varphi: V \to V$, $\boldsymbol{v}$ Eigenvektor von $\varphi \Rightarrow$ der von $\boldsymbol{v}$ erzeugte 1-dimensionale Unterraum wird in sich selbst abgebildet: $\varphi(\langle \boldsymbol{v} \rangle) \subset \langle \boldsymbol{v} \rangle$
2. $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 2 $\Rightarrow \ A \cdot \boldsymbol{v} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1+4-1 \\ -1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \boldsymbol{v}$.
3. $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, Eigenvektor $A \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_1 = v_2 = 0 \vee -\lambda^2 = 1$

   Probleme: $\boldsymbol{0}$ kann per definitionem kein Eigenvektor sein und $-\lambda^2 = 1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ Lösung komplex).

   Denn: A erzeugt eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um 90° um den Ursprung.
4. $\varphi: V \to V$, Sei $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

   $\Rightarrow \ \varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$

   $\Rightarrow \ \lambda \cdot \boldsymbol{v} - \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$

   $\Rightarrow \ (\lambda \cdot id_V - \varphi)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$

   $\Rightarrow \ \{\boldsymbol{v} \in V \mid \varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{v}\} = \mathrm{Kern}(\lambda \cdot id_V - \varphi)$

   Also: λ ist Eigenwert von $\varphi \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Kern}(\lambda \cdot id_V - \varphi) \neq \{\boldsymbol{0}\} \ \Leftrightarrow \ (\lambda \cdot id_V - \varphi)$ ist <u>nicht</u> injektiv.
5. Sei λ Eigenwert von φ, dann gilt:

   $V(\lambda, \varphi) := \mathrm{Kern}(\lambda \cdot id_V - \varphi) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{v}\}$ besteht aus $\boldsymbol{0}$ und der Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

   $V(\lambda, \varphi)$ heißt *Eigenraum* zum Eigenwert λ.
6. Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von $\varphi \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Kern}(\varphi) \neq \{\boldsymbol{0}\}$
7. Eigenwerte von Matrizen:

   Seien gegeben: $A \in \mathfrak{M}(n;K)$, $A: K^n \to K^n$, dann gilt:

   λ Eigenwert von $A \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ besitzt nichttriviale Lösung $x_1, \ldots, x_n \in K$

$\Leftrightarrow (\lambda \cdot \mathbb{E}_n - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ nichttrivial lösbar.

8. Seien gegeben: $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, DimV=$n$,
Basis $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ von V, A Koordinatenmatrix von φ bzgl. $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$
Dann gilt für den Eigenvektor $\boldsymbol{v} \in V$ mit $\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{a_1} + \ldots + v_n \boldsymbol{a_n}$ zum Eigenwert λ:
$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ

Satz 8.2

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V})$.
Dann gilt:

λ ist Eigenwert von $\varphi \Leftrightarrow \mathrm{Det}(\lambda \cdot id_V - \varphi) = 0$.

Ist $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ eine Basis von V und $A \in \mathfrak{M}(n;\mathrm{K})$ die Koordinatenmatrix bzgl. $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, dann gilt:

λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \mathrm{Det}(\lambda \cdot \mathbb{E}_n - A) = 0$.

Definition 8.3

Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,\, j \le n} \in \mathfrak{M}(n;\mathrm{K})$. Sei $(X\, \mathbb{E}_n - A)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \ldots & & X - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann heißt die Determinante $\chi_A(X) := \mathrm{Det}(X \cdot \mathbb{E}_n - A)$ das charakteristische Polynom der Matrix A.
Ist V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V})$, so heißt
$\chi_\varphi(X) := \mathrm{Det}(X \cdot id_V - \varphi)$ das charakteristische Polynom von φ.

Folgerung 8.4

Ist V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V})$. Dann gilt:
$\lambda \in \mathrm{K}$ ist Eigenwert von $\varphi \Leftrightarrow \lambda$ ist Nullstelle des charakt. Polynoms $\chi_\varphi(X)$, d.h. $\chi_\varphi(\lambda) = 0$

Lemma 8.5

Sei $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(n;K)$. Dann ist $\chi_A(X)$ ein Polynom vom Grad n mit führendem Koeffizienten 1:

$\chi_A(X) = X^n + s_1 X^{n-1} + \ldots + s_{n-1} X + s_n$ mit $s_1, \ldots, s_n \in K$ und

- $s_n = (-1)^n \cdot$ Det(A) und
- $s_1 = -$ Spur(A) = $-a_{11} - a_{22} - \ldots - a_{nn}$

Folgerung 8.6

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann besitzt φ höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Folgerung 8.7

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Sei λ ein Eigenwert von φ.
Dann gilt:
Die Dimension des zu λ gehörenden Eigenraums V(λ,φ) ist nicht größer als die Vielfachheit der Nullstellen λ in $\chi_\varphi(X)$.

Satz 8.8

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ verschiedene Eigenwerte von φ. Für $\rho = 1, \ldots, r$ sei $\boldsymbol{a}_\rho$ der Eigenvektor zum Eigenwert λ_ρ.
Dann gilt: $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ sind linear unabhängig.

Folgerung 8.9

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. $\chi_\varphi(X)$ habe n verschiedene Nullstellen in K.
Dann gibt es eine Basis von V, welche aus Eigenvektoren von φ besteht.

Definition 8.10

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
φ heißt diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine Basis $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ von V, bzgl. derer φ die Koordinatenmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ besitzt.
Allgemein gilt für $A \in \mathfrak{M}(n;K)$:
A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\exists S \in \mathfrak{M}(n;K)$ mit Det$S \neq 0$, so dass $S^{-1} A S$ eine Diagonalmatrix ist.

Folgerung 8.11 (Umformulierung von 8.9)

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Besitzt $\chi_\varphi(X)$ n verschiedene Nullstellen in K, so ist φ diagonalisierbar.
Jede Matrix $A \in \mathfrak{M}(n;K)$, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(X)$ n verschiedene Nullstellen in K besitzt, ist einer Diagonalmatrix ähnlich.

> Definition “ähnlich”:
> Seien $A, A' \in \mathfrak{M}(n;K)$. A und A' heißen ähnlich $\Leftrightarrow \exists S \in \mathfrak{M}(n;K)$ mit Det$S \neq 0$:
> $$A' = S^{-1} A S$$

Folgerung 8.12

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ verschiedene Eigenwerte von φ und $V(\lambda_1, \varphi), \ldots, V(\lambda_r, \varphi)$ die zugehörigen Eigenräume.
Dann gilt:
$$\sum_{\rho=1}^{r} V(\lambda_\rho, \varphi) = \bigoplus_{\rho=1}^{r} V(\lambda_\rho, \varphi)$$

Satz 8.13

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann sind äquivalent:
1. φ ist diagonalisierbar.
2. $\chi_\varphi(X)$ zerfällt über K in ein Produkt von Linearfaktoren. Für jede Nullstelle λ von $\chi_\varphi(X)$ gilt:
   Die Vielfachheit von λ in $\chi_\varphi(X)$ (algebraische Vielfachheit) stimmt mit DimV(λ, φ) (geometrische Vielfachheit) überein.
   $\chi_\varphi(X) = (X-\lambda_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_r)^{\mu_r}$ mit $\mu_\rho \in \mathbb{N}$ und $\mu_1 + \ldots + \mu_r = n$
   DimV(λ_ρ, φ) $= \mu_\rho$ (= Vielfachheit von λ_ρ)

Satz 8.14 (Satz von Cayley-Hamilton)

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann gilt:
φ genügt seiner eigenen charakteristischen Gleichung, d.h. $\chi_\varphi(\varphi)=0$.
[$\forall\, \boldsymbol{w} \in V$ beliebig: $\chi_\varphi(\varphi)(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{0}$]
Insbesondere gilt für jede Matrix $A \in \mathfrak{M}(n;K)$:

$$\chi_A(A)=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

[$\forall\, \boldsymbol{w} \in V$ beliebig: $\chi_A(A)\cdot \boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$]

Satz 8.15

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes <u>normiertes</u> Polynom $\mu(X) \in K[X]$ mit $\mu(\varphi)=0$ und mit folgender Eigenschaft:
Ist $g(X) \in K[X]$, so dass $g(\varphi)=0$, so gibt es ein Polynom $q(X)$ mit $g(X)=q(X)\cdot\mu(X)$.

Definition "normiert":
Sei $\mu(X)=b_0X^m+\ldots+b_{m-1}X+b_m$ mit $b_i \in K\,(i=0,\ldots,m)$
[es gilt: $b_0\neq 0 \Rightarrow \mathrm{Grad}\,\mu = m$]
μ ist normiert <> $b_0=1$

Man bezeichnet $\mu_\varphi(X)$ als das Minimalpolynom von φ.

Folgerung 8.16

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann gilt:
Das Minimalpolynom $\mu_\varphi(X)$ teilt das char. Polynom $\chi_\varphi(X)$,
d.h. $\exists\, q(X) \in K[X]$, so dass $\chi_\varphi(X)=q(X)\cdot\mu_\varphi(X)$
[Notation: $\mu_\varphi(X) \mid \chi_\varphi(X)$]

Folgerung 8.17

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann gilt:
$\chi_\varphi(X)$ und $\mu_\varphi(X)$ haben in K die selben Nullstellen, möglicherweise jedoch mit unterschiedlichen Vielfachheiten.

Folgerung 8.18

Sei V ein K-Vektorraum mit DimV=n und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Dann sind äquivalent:

1. φ ist diagonalisierbar.
2. $\mu_\varphi(X)$ zerfällt über K in ein Produkt von Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen.

§9. Euklidische Vektorräume

Definition 9.1

Eine Abbildung β mit $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt
$\Leftrightarrow$

1. β ist bilinear, d.h.
   $\forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$:
   Für $\varphi_{\boldsymbol{w}}\colon V \to \mathbb{R}$ ist $\varphi_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ und
   $\psi_{\boldsymbol{w}}\colon V \to \mathbb{R}$ ist $\psi_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$
   mit den beiden linearen Abbildungen φ und ψ.
2. β ist symmetrisch, d.h.
   $\forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$: $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$
3. β ist positiv definit, d.h.
   $\forall\, \boldsymbol{v} \in V$: $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq 0$ [= 0 für $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$]

Ein reeller Vektorraum V mit einem Skalarprodukt β heißt euklidischer Vektorraum (V,β).

Definition 9.2

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum.
Dann heißt für $\boldsymbol{v} \in V$ die Zahl $\|\boldsymbol{v}\| := \sqrt{\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ Norm von $\boldsymbol{v}$.

Satz 9.3 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum.
Dann gilt $\forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$:

$$|\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leq \|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{w}\|$$

(“ = ” gilt genau dann, wenn $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ linear unabhängig sind)

Konsequenz aus der Ungleichung:

$$-1 \leq \frac{\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})}{\|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{w}\|} \leq 1$$

Definition 9.4

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum. Seien $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ mit $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{w}$.
Dann ist der Winkel α zwischen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ definiert durch:

$$\cos \alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \frac{\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})}{\|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{w}\|}$$

Satz 9.5

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen:

1. $\forall\, \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}:\ \|\boldsymbol{v}\| \geq 0,\ \|\boldsymbol{v}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
2. $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}:\ \|a \cdot \boldsymbol{v}\| = |a| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$
3. $\forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathrm{V}:\ \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$ (sog. "Dreiecksungleichung")

Definition 9.6

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum. Seien $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathrm{V}$.
$\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ heißen zueinander orthogonal ($\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$) $\Leftrightarrow$ $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$

Definition 9.7

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum. Sei $\mathrm{M} \subset \mathrm{V}$ eine Teilmenge von V.
Dann heißt $\mathrm{M}^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \forall\, \boldsymbol{w} \in \mathrm{M}:\ \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}\}$ orthogonales Komplement von M.
($\boldsymbol{v} \in \mathrm{M}^{\perp} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \in \mathrm{M}$)
$\mathrm{M}^{\perp}$ ist stets ein Unterraum.

Definition 9.8

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum. Sei ($\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$) eine Familie von Vektoren in V.
($\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$) heißt Orthonormalsystem in V
$\Leftrightarrow$

1. $\forall\, \rho (1 \leq \rho \leq r):\ \beta(\boldsymbol{v}_\rho, \boldsymbol{v}_\rho) = \|\boldsymbol{v}_\rho\| = 1$ (normiert)
2. $\forall\, \rho, \rho' (1 \leq \rho, \rho' \leq r,\ \rho \neq \rho'):\ \beta(\boldsymbol{v}_\rho, \boldsymbol{v}_{\rho'}) = 0$, also $\boldsymbol{v}_\rho \perp \boldsymbol{v}_{\rho'}$ (orthogonal)
   $\beta(\boldsymbol{v}_\rho, \boldsymbol{v}_{\rho'}) = \delta_{\rho\rho'} = \begin{cases} 1 & \text{für } \rho = \rho' \\ 0 & \text{für } \rho \neq \rho' \end{cases}$ (Kronecker-Symbol/-delta)

Lemma 9.9

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum. Sei ($\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$) ein Orthonormalsystem in V.
Dann ist ($\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$) linear unabhängig.

Satz 9.10

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum mit DimV=n. Dann besitzt V eine orthonormale Basis.

Satz 9.11

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum mit DimV=n. Sei U ein Unterraum von V.
Dann gilt:
Es gibt genau eine lineare Abbildung
$\pi_{\mathrm{U}}: \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ (Projektion)
mit $\pi_{\mathrm{U}/U} = id_{\mathrm{U}}$ und Kern$\pi_{\mathrm{U}} = \mathrm{U}^{\perp}$.
π_{U} heißt die orthogonale Projektion auf U.

Definition 9.12 (Orthogonale Abbildungen)

Seien (V,β) und (W,γ) zwei euklidische Vektorräume.
Eine lineare Abbildung $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ heißt orthogonal
$\Leftrightarrow \quad \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{V}: \quad \beta(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \gamma(\varphi(\boldsymbol{v}_1), \varphi(\boldsymbol{v}_2))$

Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ orthogonal $\Rightarrow$ φ ist injektiv.
[Speziell gilt sogar: ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(\mathrm{V})$ und DimV=n, folgt: φ ist ein Automorphismus (bijektiv)]

Lemma 9.13

Seien (V,β) und (W,γ) zwei euklidische Vektorräume.
Sei $\varphi: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine lineare Abbildung. Sei $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ eine orthonormale Basis von V.
Dann gilt:
φ ist orthogonal $\Leftrightarrow$ $(\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n))$ ist ein Orthonormalsystem in W

Folgerung 9.14

Sei $A \in \mathfrak{M}(n;\mathbb{R})$. Dann gilt:

A ist orthogonal $\Leftrightarrow$ $A^t \cdot A = \mathbb{E}_n$ (d.h. $A^t = A^{-1}$)

Folgerung 9.15

Sei $A \in \mathfrak{M}(n;\mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:

1. A ist orthogonal
2. die Spalten in A bilden ein Orthonormalsystem (bzgl. des kanon. Skalarprodukts)
3. $A \cdot A^t = \mathbb{E}_n$
4. A ist invertierbar und $A^{-1} = A^t$
5. $A^t \cdot A = \mathbb{E}_n$
6. die Zeilen in A bilden ein Orthonormalsystem.

Definition 9.16

Die Menge der orthogonalen Matrizen $A \in \mathfrak{M}(n;\mathbb{R})$ bezeichnet man mit $O(n;\mathbb{R})$ (orthogonale Gruppe).
Die Untergruppe der orthogonalen Matrizen $A \in \mathfrak{M}(n;\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Det}A=1$ wird mit $SO(n;\mathbb{R})$ (spezielle orthogonale Gruppe) bezeichnet.

Definition 9.17 (Selbstadjungierte Endomorphismen)

Ein Endomorphismus φ eines euklidischen Vektorraums (V,β) heißt selbstadjungiert
$\Leftrightarrow \quad \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V: \ \beta(\varphi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{v}, \varphi(\boldsymbol{w}))$

Folgerung 9.18

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum mit $\mathrm{Dim}V=n$. Sei $(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ eine orthonormale Basis von V. Dann gilt:
Ein Endomorphismus φ ist selbstadjungiert
$\Leftrightarrow \quad \varphi$ hat bzgl. $(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ eine symmetrische Matrix ($A = A^t$)

Lemma 9.19

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum. Sei $\varphi: V \rightarrow V$ selbstadjungiert.
Dann gilt:
Ist $\boldsymbol{v} \in V$ ein Eigenvektor von φ und gilt für ein Element $\boldsymbol{w} \in W$: $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v}$, dann folgt: $\varphi(\boldsymbol{w}) \perp \boldsymbol{v}$
(d.h. $\varphi(\langle \boldsymbol{v} \rangle^{\perp}) \subset \langle \boldsymbol{v} \rangle^{\perp}$)

Satz 9.20

Sei (V,β) ein euklidischer Vektorraum mit $\mathrm{Dim}V=n$. Sei %phi`in{} $\mathrm{End}_K(V)$ selbstadjungiert.
Dann gilt:

Es gibt eine orthonormale Basis von V, welche aus Eigenvektoren besteht.

Insbesondere gilt:

Sei $A \in \mathfrak{M}(n;\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $P \in O(n;\mathbb{R})$, so dass $P^t A P$ diagonal ist.