Wintersemester 2007/08

Zum 8. Übungsblatt, Aufgabe 3

Aufgabenstellung:
Seien $\mathfrak{B} := \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_4\}$ und $\hat{\mathfrak{B}} := \{\hat{\mathbf{b}_1}, \ldots, \hat{\mathbf{b}_4}\}$ Teilmengen des $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{\mathbf{b}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{b}_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{b}_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{b}_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $\mathfrak{B}$ und $\hat{\mathfrak{B}}$ sind Basen des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix von $\mathfrak{B}$ nach $\hat{\mathfrak{B}}$.

Lösung:
Schreibe $\hat{\mathbf{b}_j}$ als Linearkombination von $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_4$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{b}_1} &= 2 \cdot \mathbf{b}_1 - 3 \cdot \mathbf{b}_2 + 1 \cdot \mathbf{b}_3 + 1 \cdot \mathbf{b}_1 \\
\hat{\mathbf{b}_2} &= 0 \cdot \mathbf{b}_1 + 1 \cdot \mathbf{b}_2 - 2 \cdot \mathbf{b}_3 - 1 \cdot \mathbf{b}_4 \\
\hat{\mathbf{b}_3} &= 1 \cdot \mathbf{b}_1 - 2 \cdot \mathbf{b}_2 + 2 \cdot \mathbf{b}_3 + 1 \cdot \mathbf{b}_4 \\
\hat{\mathbf{b}_4} &= -1 \cdot \mathbf{b}_1 + 1 \cdot \mathbf{b}_2 - 1 \cdot \mathbf{b}_3 - 1 \cdot \mathbf{b}_4.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind nun die Einträge der Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Rechenwege kann man im Abschnitt *Basiswechsel* der Vorlesung (nach Folgerung 5.10) nachschlagen. Dort findet sich eine ausführlichere Darstellung der zugrundeliegenden Theorie.

Alternative Methode zur Berechung von A:
Es ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Man errechnet als inverse Matrix

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A = B^{-1}\hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Methode erhält man wegen der Defintion der Übergangsmatrix. Diese ist gerade gegeben als die Matrix A, für die

$$BA = \hat{B}$$

gilt.

Die Funktion der Übergangsmatrix ist es, einen Vektor, der in Koordinaten bezüglich der Basis $\hat{\mathfrak{B}}$ gegeben ist, als Vektor bezüglich der alten Basis $\mathfrak{B}$ zu schreiben.

Beispiel:
Sei also

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\hat{\mathfrak{B}}} = 3 \cdot \hat{\mathbf{b}_1} + 1 \cdot \hat{\mathbf{b}_2} + 2 \cdot \hat{\mathbf{b}_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$_{\mathfrak{B}}\mathrm{A}_{\hat{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{v} = {}_{\mathfrak{B}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \text{-1} \\ \text{-3} & 1 & \text{-2} & 1 \\ 1 & \text{-2} & 2 & \text{-1} \\ 1 & \text{-1} & 1 & \text{-1} \end{pmatrix}_{\hat{\mathfrak{B}}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\hat{\mathfrak{B}}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}.$$

Man errechnet

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}} = 4 \cdot \mathbf{b}_1 - 6 \cdot \mathbf{b}_2 - 1 \cdot \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die Schreibweise mit den Basen als Indizes der Matrix soll lediglich der Verdeutlichung dienen. $_{\mathfrak{B}}\mathrm{A}_{\hat{\mathfrak{B}}}$ bedeutet, dass man von rechts Vektoren (beziehungsweise Matrizen) in ihrer Darstellung bezüglich $\hat{\mathfrak{B}}$ an die Matrix A multipliziert und auf der linken Seite als Ergebnis einen Vektor (beziehungsweise eine Matrix) in der Darstellung bezüglich $\mathfrak{B}$ erhält. Von links sollte man dann auch lediglich Matrizen an A multiplizieren, die - als lineare Abbildung ausgefasst - Vektoren in ihrer Darstellung bezüglich $\mathfrak{B}$ in einen anderen Raum abbilden.