Wintersemester 2007/08

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 10.01.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Seien $A, B \in \mathfrak{M}(n; K)$ und $\alpha \in K$. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit und begründen Sie ihre Antwort.
   (i) $\mathrm{Det}(A + B) = \mathrm{Det}(A) + \mathrm{Det}(B)$
   (ii) $\mathrm{Det}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Det}(A)$
   (iii) $\mathrm{Det}(A) = 1 \Longrightarrow A = E_n$
   (iv) $\mathrm{Det}(A) = 1 \Longrightarrow A$ ist injektiv als Abbildung $A : K^n \to K^n$
   (v) $\mathrm{Det}(A) = 1 \Longrightarrow A$ ist surjektiv als Abbildung $A : K^n \to K^n$

2. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:
   (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 9 & -7 \end{pmatrix}$
   (ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. Sei k eine natürliche Zahl. Seien $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_1 + \ldots + n_k = n$. Für $\kappa = 1, \ldots, k$ seien $A_\kappa \in \mathfrak{M}(n_\kappa; K)$. Sei

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_k \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, n_1 \\ \}\, n_2 \\ \\ \}\, n_k \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{n_1} \underbrace{\quad}_{n_2} \qquad \underbrace{\quad}_{n_k} \end{array}$$

Zeigen Sie: $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Det}(A_k)$.

bitte wenden!!

4. Seien

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(m,n;K).$$

Sei $r = \max\{\varrho : \text{es gibt in } A \text{ eine } \varrho \times \varrho \text{ Teilmatrix } B \text{ mit } \mathrm{Det}(B) \neq 0\}$.

Zeigen Sie: Es gilt Rang $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = r$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!!