

11. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 17.01.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (i) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c \in \mathbb{Q}),$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 11 & 11 & 99 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$ mit Hilfe von Determinanten.

2. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(n; K)$. Weiter sei $j \in \{1, \dots, n\}$ fest. Zeigen Sie:

$$\text{Det } A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \text{Det } A_{ij},$$

wobei A_{ij} wie in Definition 7.14 der Vorlesung definiert ist (das heißt beweisen Sie die Version für Spalten von Satz 7.16).

3. Sei $\mathfrak{M}(n; \mathbb{Z})$ die Menge der $n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbb{Z} . Eine Matrix $A \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{Z})$ heißt *unimodular* genau dann, wenn $\text{Det } A = \pm 1$ gilt. Zeigen Sie:

Ist $A \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{Z})$ unimodular, so liegt auch die Matrix A^{-1} in $\mathfrak{M}(n; \mathbb{Z})$.

bitte wenden!!

4. Es seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_i + b_i \neq 0$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Beweisen Sie:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

Hinweis: Subtrahieren Sie die letzte Spalte von jeder anderen Spalte und klammern Sie aus den Spalten und Zeilen geeignete Faktoren aus. Subtrahieren Sie dann die letzte Zeile von allen anderen. Führen Sie dadurch die Determinante auf eine $(n - 1)$ -reihige Determinante des selben Typs zurück.