Wintersemester 2007/08

13. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 31.01.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$
Ist A diagonalisierbar?

2. Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in \mathfrak{M}(n; K)$ nichtsingulär und diagonalisierbar.
Zeigen Sie: A^{-1} ist diagonalisierbar.

3. a) Seien $A, B \in \mathfrak{M}(n; K)$ Matrizen mit denselben Eigenwerten und Eigenvektoren. Das Erzeugnis der Eigenvektoren sei K^n.
Zeigen Sie: $AB = BA$.
   b) Sei $A \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{R})$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen, reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$.
Zeigen Sie: Es existiert eine Matrix $B \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{R})$ mit $B^2 = A$.

4. Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V.
Zeigen Sie: $f - \mathrm{Id}_V$ ist genau dann invertierbar, wenn 1 kein Eigenwert von f ist. An welcher Stelle des Beweises geht ein, dass V endlich-dimensional ist?