Wintersemester 2007/08

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 01.11.2007, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei K eine Menge mit 2 Elementen, also K = $\{a, b\}$. Auf K seien zwei Verknüpfungen $*$ und $\circ$ mit folgenden Eigenschaften definiert:

   (1) $(\{a, b\}, *)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element a

   (2) $b \circ b = b$

   (3) Es gilt $A \circ (B * C) = (A \circ B) * (A \circ C) \quad \forall A, B, C \in K$.

   Zeigen Sie: K ist nicht notwendig ein Körper.

2. Seien A, B nichtleere Mengen und

$$\begin{aligned} f &: A \longrightarrow B \\ g &: B \longrightarrow A \end{aligned}$$

   Abbildungen. Es gelte $g \circ f = \mathrm{id}_A$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie: f ist injektiv und g ist surjektiv.

3. Zu einer Gruppe G mit den Elementen $a_1, \ldots, a_n$ und der Verknüpfung $\circ$, kann man gemäß

$\circ$	a_1	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$\cdots$	$a_1 \circ a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$a_i \circ a_j$	$\vdots$
a_n	$a_n \circ a_1$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

   eine *Gruppentafel* angeben, wobei der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte gerade $a_i \circ a_j$ ist.

   a) Zeigen Sie, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element der Gruppe genau einmal vorkommt.

   b) Geben Sie mit Teilaufgabe a) eine Gruppentafel für eine Gruppe mit 3 Elementen an.

bitte wenden!

4. Gegeben seien ein Quadrat ABCD und die folgenden Abbildungen des Quadrates in sich selbst:

   - I = Identität
   - D = Drehung um 90° im Uhrzeigersinn um seinen Mittelpunkt
   - E = Drehung um 180° im Uhrzeigersinn um seinen Mittelpunkt
   - F = Drehung um 270° im Uhrzeigersinn um seinen Mittelpunkt
   - M = Spiegelung an der Achse EE'
   - N = Spiegelung an der Achse FF'
   - O = Spiegelung an der Achse GG'
   - P = Spiegelung an der Achse HH'.

   Diese Abbildungen bilden eine Gruppe, wenn man als Verknüpfung die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen wählt. Bestimmen Sie für diese Gruppe die Gruppentafel.