Wintersemester 2007/08

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 15.11.2007, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei A eine Aussage über ganze Zahlen. Für $n \in \mathbb{Z}$ bedeute A(n), dass die Aussage A für n gilt.

   Es seien die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

   (i) A(n_0)

   (ii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ impliziere die Aussage
   $$\left[\forall k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n_0 \leq k \leq n : A(k)\right]$$
   die Aussage A(n+1).

   Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips:
   $$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \geq n_0 : A(n).$$

2. Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ heißt
   $$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
   Binomialkoeffizient von n und m, wobei $k! = k \cdot (k-1) \cdots 1$ bezeichnet (Hinweis: $0! = 1$). Zeigen Sie folgende Aussagen per Induktion:

   a) $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n > m$

   b) $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad \forall n \geq m.$

3. Es sei P der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten.

   a) Beweisen Sie: $U = \{p \in P \,:\, p(1) = 0\}$ ist ein Unterraum von P.

   b) Geben Sie eine Basis von U an und ergänzen Sie diese zu einer Basis von P.

   Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Polynome $\{X^k \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig sind.

4. Gegeben seien zwei Teilmengen M,N eines Vektorraumes V.

   a) Zeigen Sie:
   $$M \subseteq N \Rightarrow \langle M \rangle \subseteq \langle N \rangle \,.$$
   Gilt immer auch die Umkehrung?

   b) Zeigen Sie:
   $$\langle M \cap N \rangle \subseteq \langle M \rangle \cap \langle N \rangle \,.$$
   Gilt sogar Gleichheit?