Wintersemester 2007/08

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 22.11.2007, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei V ein reeller Vektorraum und $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in V$ linear unabhängige Vektoren. Seien weiter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \mathbf{v}_1 & = & \mathbf{a} & + & \mathbf{b} & + & \mathbf{c} & + & \mathbf{d} \\ \mathbf{v}_2 & = & 2\mathbf{a} & + & 2\mathbf{b} & + & \mathbf{c} & - & \mathbf{d} \\ \mathbf{v}_3 & = & \mathbf{a} & + & \mathbf{b} & + & 3\mathbf{c} & - & \mathbf{d} \\ \mathbf{v}_4 & = & \mathbf{a} & & & - & \mathbf{c} & + & \mathbf{d} \\ \mathbf{v}_5 & = & & - & \mathbf{b} & + & \mathbf{c} & - & \mathbf{d} \end{array}$$

Vektoren in V.

   a) Ist die Familie $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$ linear abhängig oder unabhängig?

   b) Sei U der von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$ erzeugte Unterraum. Bestimmen Sie Dim U.

2. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Mit $\mathfrak{M}(m, n; K)$ bezeichnen wir die $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K. Wir können auf $\mathfrak{M}(m, n; K)$ wie folgt eine Addition und skalare Multiplikation definieren:

$$(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} + (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}},$$
$$\alpha \cdot (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}},$$

wobei

$$(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}},\ (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \in \mathfrak{M}(m, n; K) \text{ und } \alpha \in K.$$

Mit diesen Verknüpfungen ist $\mathfrak{M}(m, n; K)$ ein K-Vektorraum. Für $n \in \mathbb{N}$ und $Q = \mathfrak{M}(n, n; K)$ seien

$$S = \left\{ (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in Q \,:\, a_{ij} = a_{ji}\, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

und

$$A = \left\{ (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in Q \,:\, a_{ij} = -a_{ji}\, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Beweisen Sie:

   a) S und A sind Unterräume von Q mit $S \cap A = \{0\}$.

   b) Es ist $\mathrm{Dim}_K S = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\mathrm{Dim}_K A = \frac{n(n-1)}{2}$.

   c) Zu jedem $\mathbf{q} \in Q$ existieren $\mathbf{s} \in S$ und $\mathbf{a} \in A$ mit $\mathbf{q} = \mathbf{s} + \mathbf{a}$.

bitte wenden!!

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K. Seien $U_1, \ldots, U_n$ Unterräume von V. V heißt direkte Summe von $U_1, \ldots, U_n$ genau dann, wenn

   1. $V = U_1 + \ldots + U_n = \{\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n : \mathbf{u}_i \in U_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$ und
   2. $\forall k$ mit $1 \leq k \leq n$ ist $U_k \cap (U_1 + \ldots + U_{k-1}) = \{\mathbf{0}\}$

   gelten. Beweisen Sie eine Version von Satz 3.23, indem Sie die Äquivalenz folgender Aussagen zeigen:

   (i) $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$

   (ii) Jedes $\mathbf{v} \in V$ hat eine eindeutige Darstellung $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n$ mit $\mathbf{u}_i \in U_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

   (iii) $V = U_1 + \ldots + U_n$ und $\text{Dim } V = \text{Dim } U_1 + \ldots + \text{Dim } U_n$.

4. Eine Teilmenge L eines Vektorraums V heißt eine *lineare Mannigfaltigkeit*, wenn es zu ihr einen Unterraum U_L von V gibt, so dass für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ die Differenz $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ in U_L und umgekehrt für $\mathbf{a} \in L$ und $\mathbf{u} \in U_L$ immer $\mathbf{a} + \mathbf{u}$ wieder in L liegt.

   a) Beweisen Sie: Jeder Unterraum von V ist eine lineare Mannigfaltigkeit.

   b) Welche einelementigen Teilmengen von V sind lineare Mannigfaltigkeiten? Welche einelementigen Teilmengen von V sind lineare Unterräume?

   c) Zeigen Sie, dass der zu einer nichtleeren Mannigfaltigkeit L gehörende Unterraum U_L durch L eindeutig bestimmt ist und geben Sie diesen an.