Wintersemester 2007/08

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 29.11.2007, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Seien U,V,W Vektorräume über dem Körper K. Seien weiter $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ Isomorphismen. Zeigen Sie:
   a) $\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$ ist ein Isomorphismus.
   b) $\varphi^{-1} : V \longrightarrow U$ ist ein Isomorphismus.

2. Betrachte die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Zeigen Sie, dass $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bildet und dass $F := \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ linear unabhängig ist.
   b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz eine Basis C des $\mathbb{R}^4$ für die $F \subseteq C \subseteq (B \cup F)$ gilt.

3. Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind und bestimmen Sie gegebenenfalls Kern und Bild der Abbildungen.
   a) $f : K^n \to K^n, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ für einen festen Vektor $\mathbf{v}_0 \in K^n$
   b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
   c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_4 \\ 2x_4 \\ 3x_4 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$

4. Sei K ein Körper und V ein m-dimensionaler Unterraum des K^n. Zeigen Sie, dass es natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_m$ aus $\{1, \dots, n\}$ gibt, so dass die lineare Abbildung

$$f : V \to K^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{a_1} \\ \vdots \\ x_{a_m} \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus ist.