Wintersemester 2007/08

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 06.12.2007, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Begründen Sie, ob für die folgenden Matrizen A und B das Produkt $A \cdot B$ existiert und berechnen Sie dieses gegebenenfalls.

   (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

   (ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -7 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 9 & -7 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

2. Eine Matrix $N \in \mathfrak{M}(n; K)$ heißt nilpotent, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass N^m, also das m-fache Produkt von N, die Nullmatrix ist.

   (i) Zeigen Sie, dass für jede nilpotente Matrix N eine Matrix $B \in \mathfrak{M}(n; K)$ existiert, so dass $B \cdot (E_n - N) = E_n$ ist, wobei

   $$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   die $n \times n$-Einheitsmatrix ist. Betrachten Sie hierzu die Matrix $N^0 + N^1 + \ldots + N^m$ mit $N^0 = E_n$.

   (ii) Zeigen Sie:

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   ist nilpotent.

bitte wenden!!!

(iii) Bestimmen Sie zu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $D \in \mathfrak{M}(n; K)$ mit $C \cdot D = E_n$.

3. Sei $A \in \mathfrak{M}(n; K)$ und seien $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in K^n$.

   (i) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ habe genau eine Lösung. Hat dann auch das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ genau eine Lösung?

   (ii) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ habe keine Lösung. Gibt es dann ein $\mathbf{c}$, so dass $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ mehr als eine Lösung hat?

4. Seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K mit Dim $U = n$, Dim $V = m$ und Dim $W = l$.
   Seien $\mathfrak{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ bzw. $\mathfrak{C} = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m)$ bzw. $\mathfrak{D} = (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_l)$ Basen von U bzw. V bzw. W. Seien $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen. Ihre Koordinatenmatrizen bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ seien A bzw. B. Dann gilt: $B \cdot A$ ist die Koordinatenmatrix von $\psi \circ \varphi$ bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$.