Wintersemester 2007/08

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 13.12.2007, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Zeigen Sie: $R := \{k \cdot 2^l : k, l \in \mathbb{Z}\}$ ist bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins. Ist R ein Körper?

2. Sei K ein Körper und seien weiter m, n natürliche Zahlen. Zwei Matrizen $A, A' \in \mathfrak{M}(m, n; K)$ heißen genau dann äquivalent, wenn es invertierbare Matrizen $S \in \mathfrak{M}(m; K)$ und $T \in \mathfrak{M}(n; K)$ gibt mit $A = SA'T$.

   Zeigen Sie: Zu jeder Matrix $A \in \mathfrak{M}(m, n; K)$ gibt es eine ganze Zahl r mit $0 \le r \le \min\{m, n\}$, so dass A zur Matrix

$$\begin{array}{r} \\ r\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ m-r\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \end{array}
\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}^{r} \; \overbrace{\hphantom{0 \quad \dots \quad 0}}^{n-r} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   äquivalent ist.

   Anleitung: Sei $f : K^n \to K^m$ die von A in kanonischer Weise induzierte lineare Abbildung. Stellen Sie K^n als direkte Summe $U \oplus W = K^n$ mit $W = \text{Kern } f$ dar.

3. Seien $\mathfrak{B} := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_4\}$ und $\hat{\mathfrak{B}} := \{\hat{\mathbf{b}_1}, \dots, \hat{\mathbf{b}_4}\}$ Teilmengen des $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   und

$$\hat{\mathbf{b}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{b}_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{b}_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{b}_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie: $\mathfrak{B}$ und $\hat{\mathfrak{B}}$ sind Basen des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix von $\mathfrak{B}$ nach $\hat{\mathfrak{B}}$.

bitte wenden!!

4. Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Weiter sei E_n die n-reihige Einheitsmatrix. Beweisen Sie:

   a) Ist $A \in \mathfrak{M}(n; K)$, so gilt $AB = BA$ für alle $B \in \mathfrak{M}(n; K)$ genau dann, wenn $A = \alpha E_n$ für ein $\alpha \in K$ ist.

   b) Ist $f : V \to V$ linear und ist die Matrixdarstellung von f bezüglich jeder Basis von V dieselbe, so existiert ein $\alpha \in K$ mit $f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in V$.