Wintersemester 2007/08

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Abgabe: Do, 20.12.2007, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

   a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 11 & -2 & 6 & -4 \\ 10 & -7 & 9 & -9 \end{pmatrix}$

   b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 0 & -3 & 6 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 8 & -8 \\ -3 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

2.

   a) Es seien
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie $\operatorname{sign}(\sigma), \sigma^{-1}, \sigma \circ \tau$ und stellen Sie σ als Produkt von Transpositionen dar.

   b) Zeigen Sie, dass jedes Element in $\mathfrak{S}_n (n \geq 2)$ als Produkt von Zyklen aus der Menge
   $$\{(1,2),(1,2,3),\ldots,(1,2,\ldots,n)\}$$
   geschrieben werden kann.

3. Sei $n \geq 2$ und
   $$\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,:\, \operatorname{sign} \sigma = +1\}.$$

   a) Zeigen Sie: $\mathcal{A}_n$ ist bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

   b) Sei $\tau = (1,2)$. Zeigen Sie:

      (i) $\mathfrak{S}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_n\tau$

      (ii) $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_n\tau = \emptyset$

      (iii) Die Anzahl der Elemente in $\mathcal{A}_n$ ist $\frac{1}{2}n!$.

bitte wenden!!

4. Sei K ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}$, $a \in K\backslash\{0\}$ und $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ seien

$$V_{ij}^{(n)} := \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} & & & \text{i-te Spalte} & & & & \text{j-te Spalte} & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \text{j-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$D_i^{(n)}(a) := \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{i-te Spalte} & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$T_{ij}^{(n)}(a) := \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & & \text{j-te Spalte} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & a & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

die sogenannten Elementarmatrizen. Sei M die Menge aller endlichen Produkte von Elementarmatrizen.

Zeigen Sie: $GL(n; K) = M$.