**Lineare Algebra I, Musterlösung zu Blatt 9**

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 11 & -2 & 6 & -4 \\ 10 & -7 & 9 & -9 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 0 & -3 & 6 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 8 & -8 \\ -3 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

a) $A$ ist nicht invertierbar, da

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit die Spalten linear abhängig sind und A keinen vollen Spaltenrang hat.

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -19/2 & -3/2 & -1/2 & 7/2 & 7/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 13/2 & 5/4 & 1/4 & -9/4 & -5/2 \\ 0 & 3/8 & -1/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}$

**Rechenweg zu b):**

$$\left.\begin{array}{rrrr|rrrr}
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & \\
-2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-10 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
-5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & \\
1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
-1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
-5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & \\
1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & -1/2 & 0 & -5/2 & 0 & 1 & 1/2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & & & & & \\
1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & & & & & \\
1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -1
\end{array}\right.$$

2.

a) Es seien

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{sign}(\sigma), \sigma^{-1}, \sigma \circ \tau$ und stellen Sie $\sigma$ als Produkt von Transpositionen dar.

b) Zeigen Sie, dass jedes Element in $\mathfrak{S}_n (n \geq 2)$ als Produkt von Zyklen aus der Menge

$$\{(1,2), (1,2,3), \ldots, (1,2,\ldots,n)\} \tag{1}$$

geschrieben werden kann.

**Lösung:**

a) Gesucht sind die Fehlstandspaare von $\sigma$, also alle Paare $(i, j) \in \{1, \ldots, 5\}$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.
Es ist:
$$\begin{aligned} \sigma(1) &> \sigma(5) \\ \sigma(2) &> \sigma(3) \\ \sigma(2) &> \sigma(5) \\ \sigma(3) &> \sigma(5) \\ \sigma(4) &> \sigma(5). \end{aligned}$$
Es gibt also 5 Fehlstandspaare, daher ist sign $\sigma = (-1)^5 = -1$.
Weiter ist
$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Für die Verknüpfung der beiden Permutationen $\sigma$ und $\tau$ ergibt sich
$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3\,5),$$
denn es gilt z.B.
$$\begin{aligned} \tau(1) = 5,\ \sigma(5) = 1 &\Rightarrow \sigma(\tau(1)) = 1 \\ \tau(2) = 3,\ \sigma(3) = 3 &\Rightarrow \sigma(\tau(2)) = 3. \end{aligned}$$
Des weiteren sollte $\sigma$ als Produkt von Transpositionen geschrieben werden.
$$\sigma = (4, 5) \circ (2, 5) \circ (1, 5)$$
Es gibt eine zweite Möglichkeit, das Signum einer Permutation zu berechnen. Wir haben hier $\sigma$ als Produkt dreier Transpositionen geschrieben. Daraus folgt sign $\sigma = (-1)^3 = -1$. Hier ist es nicht notwendig, die kürzeste Darstllung von $\sigma$ als Produkt von Transpositionen gefunden zu haben.

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich jedes Element der $\mathfrak{S}_n$ als Produkt von Transpositionen $(i, j)$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ schreiben läßt. Also läßt sich jedes Element der $\mathfrak{S}_n$ auch als Produkt von Transpositionen der Form $(1, i)$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ schreiben, da
$$(i, j) = (1, i) \circ (1, j) \circ (1, i)\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2}$$
Ist also $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_m$ mit Transpositionen $\tau_k = (i_k, j_k)$ für $k = 1, \ldots, m$, so können wir dies mit (2) als
$$\sigma = (1, i_1) \circ (1, j_1) \circ (1, i_1) \circ \ldots \circ (1, i_m) \circ (1, j_m) \circ (1, i_m) \tag{3}$$
schreiben. Ist nun $M$ die in der Aufgabenstellung gegebene Menge (vgl. (1)), kann jede Permutation der Form $(1, i)$ als Produkt von Elementen aus M geschrieben werden, denn für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:
$$(1, i) = (1\,2\,\ldots\,i-1) \circ (1\,2\,\ldots\,i)^{i-1}.$$

Daraus folgt die Behauptung, denn analog zu (3) können wir nun die Permutationen der Form $(1, i)$ durch Produkte von Permutationen aus $M$ ersetzen.

3. Sei $n \geq 2$ und
$$\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,:\, \text{sign}\,\sigma = +1\}.$$

   a) Zeigen Sie: $\mathcal{A}_n$ ist bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

   b) Sei $\tau = (1, 2)$. Zeigen Sie:

      (i) $\mathfrak{S}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_n\tau$

      (ii) $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_n\tau = \emptyset$

      (iii) Die Anzahl der Elemente in $\mathcal{A}_n$ ist $\frac{1}{2}n!$.

**Lösung:**

a) Allgemein gilt das *Untergruppenkriterium*:

Ist $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e$ und $U$ eine Teilmenge von $G$, so ist $(U, *)$ selbst wieder eine Gruppe (Sprechweise: $U$ ist *Untergruppe* von $G$) genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen gelten:

(i) $U \neq \emptyset$

(ii) $\forall a, b \in U$ ist $a * b^{-1} \in U$.

Wir zeigen im Folgenden, dass alle benötigten Voraussetzungen aus (i) und (ii) folgen. Nach Bedingung (i) ist $U \neq \emptyset$. Dies ist schon die erste Bedingung, die wir an eine Gruppe stellen. Da $(G, *)$ eine Gruppe ist, müssen Rechenregeln wie die Assoziativität auch schon für $(U, *)$ gelten, denn wenn diese schon auf einer Teilmenge von $G$ verletzt wären, dann könnten sie offensichtlich nicht für ganz $G$ gelten. Da $U \neq \emptyset$ existiert mindestens ein $x \in U$. Zu diesem $x$ liegt nach (ii) auch $xx^{-1} = e \in U$. Das neutrale Element muss also in $U$ liegen. Wieder folgt mit (ii), dass dann wegen $e \in U$ auch $ex^{-1} = x^{-1}$ in $U$ liegt. Folglich existiert zu jedem Element aus $U$ auch das Inverse bezüglich der Verknüpfung $*$ in $U$. Im dritten Schritt können wir nun die Abgeschlossenheit von $U$ bezüglich $*$ zeigen. Sind $x$ und $y$ aus U, so liegt (wie gerade bewiesen) auch $y^{-1}$ in $U$. Dann folgt mit (ii), dass $x(y^{-1})^{-1} = xy$ in $U$ liegt. Somit ist $(U, *)$ eine Gruppe.

Dies können wir auf die Aufgabenstellung anwenden. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{A}_n$ die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Dann folgt, dass $\mathcal{A}_n$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe bildet (als Untergruppe der $\mathfrak{S}_n$). Da die Identität keine Fehlstandspaare hat, ist ihr signum $+1$ und somit gilt Id $\in \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_n \neq \emptyset$ (i). Sind nun für $k = 1, 2$

$$\sigma_k = (i_1^{(k)}, j_1^{(k)}) \circ \ldots \circ (i_{t_k}^{(k)}, j_{t_k}^{(k)})$$

Permutationen aus der $\mathcal{A}_n$, so sind $t_1$ und $t_2$ gerade Zahlen, da sonst eine der beiden Permutationen das signum -1 hätte. Es ist weiter

$$\sigma_2^{-1} = (i_{t_2}^{(2)}, j_{t_2}^{(2)}) \circ \ldots \circ (i_1^{(2)}, j_1^{(2)}).$$

Daraus folgt

$$\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1} = (i_1^{(1)}, j_1^{(1)}) \circ \ldots \circ (i_{t_1}^{(1)}, j_{t_1}^{(1)}) \circ (i_{t_2}^{(2)}, j_{t_2}^{(2)}) \circ \ldots \circ (i_1^{(2)}, j_1^{(2)})$$

und da wir $\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}$ als Komposition von $t_1 + t_2$ Transpositionen geschrieben haben, liegt $\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}$ wieder in $\mathcal{A}_n$, da sign $(\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}) = (-1)^{t_1+t_2} = +1$.

(b) (i) Zu zeigen ist $\mathfrak{S}_n \supset \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_n \tau$ und $\mathfrak{S}_n \subset \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_n \tau$. Da $\mathcal{A}_n$ und $\tau$ Teilmenge bzw. Element der $\mathfrak{S}_n$ sind, folgt sofort $\mathfrak{S}_n \supset \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_n \tau$.
Sei nun $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ beliebig.

($\alpha$) $\sigma \in \mathcal{A}_n \Rightarrow \sigma \in \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_n \tau$

($\beta$) $\sigma \notin \mathcal{A}_n \Rightarrow \sigma \circ \tau \in \mathcal{A}_n$ (nach der Formel zur Berechnung des signum über die Anzahl der benötigten Transpositionen) und somit $\sigma = \underbrace{\sigma \circ \tau}_{\in \mathcal{A}_n} \circ \tau \in \mathcal{A}_n \tau$, woraus $\sigma \in \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_n \tau$ folgt.

Aus ($\alpha$) und ($\beta$) folgt $\mathfrak{S}_n \subset \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_n \tau$ und damit die Behauptung.

(ii) **Annahme:** $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_n \tau \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists \sigma \in \mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_n \tau \\
&\Rightarrow \sigma \in \mathcal{A}_n \text{ und } \sigma \in \mathcal{A}_n \tau \\
&\Rightarrow \text{sign } \sigma = 1 \text{ und } \sigma = (i_1, j_1) \circ \ldots \circ (i_n, j_n) \circ \tau \text{ mit n gerade} \\
&\Rightarrow \text{sign } \sigma = 1 \text{ und sign } \sigma = (-1)^{n+1} = -1 \text{ Widerspruch} \\
&\Rightarrow \text{Annahme falsch} \\
&\Rightarrow \mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_n \tau = \emptyset
\end{aligned}$$

(iii) Es genügt, eine Bijektion zwischen $\mathcal{A}_n$ und $\mathcal{A}_n \tau$ anzugeben, da beide Mengen endlich sind, besitzen sie dann gleich viele Elemente. Da die $\mathfrak{S}_n$ die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{A}_n$ und $\mathcal{A}_n \tau$ ist (vgl. (i) und (ii)) folgt daraus die Behauptung.
Sei

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathcal{A}_n &\longrightarrow \mathcal{A}_n \tau \\
\sigma &\longmapsto \sigma \circ \tau.
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist nun, dass $\Phi$ die gewünschte Bijektion ist, also

($\alpha$) $\Phi$ ist surjektiv

($\beta$) $\Phi$ ist injektiv

Zu ($\alpha$):
Sei $\tilde{\sigma} \in \mathcal{A}_n \tau$ beliebig. Insbesondere ist dann $\tilde{\sigma} \circ \tau \in \mathcal{A}_n$ (nach b) (i) ($\beta$) unb b) (ii)). Gesucht ist nun ein Urbild von $\tilde{\sigma}$ bezüglich $\Phi$. Es gilt aber $\tau \circ \tau =$ Id und damit

$$\Phi(\underbrace{\tilde{\sigma} \circ \tau}_{\in \mathcal{A}_n}) = \tilde{\sigma} \circ \tau \circ \tau = \tilde{\sigma}.$$

Also ist $\Phi$ surjektiv.
Zu ($\beta$):
Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{A}_n$ mit $\Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2)$, also $\sigma_1 \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau$. Die Anwendung von $\tau$ von rechts liefert $\sigma_1 \circ \tau \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau \circ \tau$ und somit $\sigma_1 = \sigma_2$. Also ist $\Phi$ injektiv.

*Hinweis 1:* Es genügt (als alternative Lösung) zu zeigen, dass eine Umkehrabbildung $\Phi^{-1}$ von $\Phi$ existiert, da dann $\Phi$ bijektiv sein muss (analog zu Blatt 2, Aufgabe 2). Hier ist allerdings nachzurechnen, dass $\Phi \circ \Phi^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_n\tau}$ **und** dass $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_n}$ gilt. Nachrechnen kann man das mit

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \mathcal{A}_n\tau &\longmapsto \mathcal{A}_n \\ \upsilon &\longrightarrow \upsilon \circ \tau. \end{aligned}$$

*Hinweis 2:* Die konkrete Gestalt der Permutation $\tau = (1, 2)$ ist nicht wesentlich. Die Aufgabe und sämtliche Rechnungen funktionieren analog mit einer beliebigen ungeraden Permutation $\tau$.

4. Sei $K$ ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}$, $a \in K\backslash\{0\}$ und $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ seien

$$V_{ij}^{(n)} := \begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & \text{i-te Spalte} & & & & \text{j-te Spalte} & & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 &&&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \text{j-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

$$D_i^{(n)}(a) := \begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & \text{i-te Spalte} & & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& a &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

$$T_{ij}^{(n)}(a) := \begin{array}{cc} \begin{matrix} \qquad\qquad\qquad \text{j-te Spalte} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & a & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

die sogenannten Elementarmatrizen. Sei $M$ die Menge aller endlichen Produkte von Elementarmatrizen.
Zeigen Sie: $GL(n;K) = M$.

**Lösung:**

Zu zeigen:

($\alpha$) $M \subset \mathrm{GL}\,(n;K)$

($\beta$) $M \supset \mathrm{GL}\,(n;K)$

Zu ($\alpha$):

Behauptung: Jede Elementarmatrix ist invertierbar.

Beweis:

$\forall i, j, n, a :$

$$\begin{aligned} V_{i,j}^{(n)} \cdot V_{i,j}^{(n)} &= E_n \\ D_i^{(n)}(a) \cdot D_i^{(n)}(1/a) &= E_n \\ T_{ij}^{(n)}(a) \cdot T_{ij}^{(n)}(a) &= E_n \end{aligned}$$

Behauptung: Jedes endliche Produkt invertierbarer Matrizen ist invertierbar.

Beweis: Seien $A_1, \ldots A_t$ invertierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} A_t^{-1} \cdots A_1^{-1} \cdot A_1 \cdots A_t &= A_t^{-1} \cdots (A_1^{-1} \cdot A_1) \cdots A_t \\ &= A_t^{-1} \cdots A_2^{-1} \cdot A_2 \cdots A_t = \ldots = E_n \text{ und} \\ A_1 \cdots A_t \cdot A_t^{-1} \cdots A_1^{-1} &= A_1 \cdots (A_t \cdot A_t^{-1}) \cdots A_1^{-1} \\ &= A_1 \cdots A_{t-1} \cdot A_{t-1}^{-1} \cdots A_1^{-1} = \ldots = E_n. \end{aligned}$$

Also ist $A_t^{-1} \cdots A_1^{-1}$ die inverse Matrix zu $A_1 \cdots A_t$.

$\Rightarrow M \subset \mathrm{GL}\,(n;K)$

Zu ($\beta$):

Sei $A \in \mathrm{GL}\,(n;K)$ beliebig.

$\overset{\text{VL}}{\Rightarrow} A$ geht aus $E_n$ durch endlich viele elementare Umformungen der Typen (I), (II) und (III) mit

(I) Vertauschung zweier Zeilen

(II) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$

(III) Addition des $a$-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

hervor.

$\overset{\text{VL}}{\Rightarrow}$ (I), (II), (III) entsprechen der Multiplikation mit einer Elementarmatrix

(I) $\leftrightarrow$ Multiplikation mit $V_{ij}^{(n)}$

(II) $\leftrightarrow$ Multiplikation mit $D_i^{(n)}(a)$

(III) $\leftrightarrow$ Multiplikation mit $T_{ij}^{(n)}(a)$

Die Hintereinanderausführung zweier solcher elementarer Umformungen entspricht gerade der Multiplikation der zugehörigen Elementarmatrizen.

$\Rightarrow M \supset \mathrm{GL}\,(n; K)$

$\Rightarrow M = \mathrm{GL}\,(n; K)$