Lösungsskizze zum 13. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$
Ist A diagonalisierbar?

   Lösung: $\chi_A(X) = X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 32X + 16 = (X-2)^4$.

   Das Minimalpolynom ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms. Außerdem gilt $A - 2E_4 \neq 0$. Weiter gilt
$$(A-2E_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 & 4 \\ 4 & 12 & -12 & 8 \\ -4 & 8 & -12 & 12 \\ -4 & 8 & -16 & 16 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Daraus folgt
$$\mu_A(X) = (X-2)^2.$$
Das Minimalpolynom zerfällt zwar in Linearfaktoren, hat jedoch nicht nur einfache Nullstellen, daher ist A nicht diagonalisierbar.

2. Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in \mathfrak{M}(n;K)$ nichtsingulär und diagonalisierbar.
Zeigen Sie: A^{-1} ist diagonalisierbar.

   Lösung: A ist nichtsingulär und diagonalisierbar. Also existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathfrak{M}(n;K)$ mit
$$SAS^{-1} = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \,\text{mit}\, \lambda_i \in K\backslash\{0\}.$$
Hier bezeichnet $D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen. Damit ist
$$SA^{-1}S^{-1} = (SAS^{-1})^{-1} = D(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$$
und somit ist A^{-1} ist diagonalisierbar.

3. a) Seien $A, B \in \mathfrak{M}(n; K)$ Matrizen mit denselben Eigenwerten und Eigenvektoren. Das Erzeugnis der Eigenvektoren sei K^n.
Zeigen Sie: $AB = BA$.

b) Sei $A \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{R})$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen, reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$.
Zeigen Sie: Es existiert eine Matrix $B \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{R})$ mit $B^2 = A$.

Lösung:

a) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von A bzw. B. Die Matrizen sind diagonalisierbar, da die Summe der geometrischen Vielfachheiten n ist. Beide Matrizen sind außerdem durch den selben Basiswechsel diagonalisierbar, da man die gleiche Basis aus Eigenvektoren verwenden kann, also existiert $S \in \mathfrak{M}(n; K)$ mit

$$SAS^{-1} = D_1 \text{ und } SBS^{-1} = D_2$$

mit Diagonalmatrizen D_1 und D_2. Für diese wissen wir $D_1 D_2 = D_2 D_1$. Daher ist

$$\begin{aligned} AB &= S^{-1} D_1 S S^{-1} D_2 S = S^{-1} D_1 D_2 S \\ &= S^{-1} D_2 D_1^{-1} = S^{-1} D_2 S S^{-1} D_1 S = BA. \end{aligned}$$

b) Da es n paarweise verschiedene Eigenwerte gibt, ist A diagonalisierbar, also existiert $S \in \mathfrak{M}(n; K)$ mit

$$S^{-1} AS = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Folglich ist

$$C^2 = S^{-1} AS \text{ mit } C = D(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}).$$

Wählen wir $B = SCS^{-1}$, so gilt

$$B^2 = (SCS^{-1})^2 = SCS^{-1} SCS^{-1} = SC^2 S^{-1} = SS^{-1} ASS^{-1} = A.$$

4. Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V.
Zeigen Sie: $f - \mathrm{Id}_V$ ist genau dann invertierbar, wenn 1 kein Eigenwert von f ist. An welcher Stelle des Beweises geht ein, dass V endlich-dimensional ist?

Lösung:

$$\begin{aligned} &1 \text{ kein Eigenwert von } f \iff \operatorname{Kern}(f - \mathrm{Id}_V) = \{0\} \\ &\iff f - \mathrm{Id}_V \text{ ist injektiv} \overset{\operatorname{Dim} V < \infty}{\iff} f - \mathrm{Id}_V \text{ ist bijektiv} \end{aligned}$$