Sommersemester 2008

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: Do, 10.04.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{R}$:

   a) $\frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)^2}$

   b) $\frac{|2+i|(1-2i)}{(1+i)(3+i)}$

   c) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} i^\nu$.

2. Sei V ein Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Seien β_1 und β_2 Skalarprodukte auf V. Zeigen Sie:

   Gilt $\beta_1(\mathbf{v},\mathbf{v})=\beta_2(\mathbf{v},\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{v}\in V$, so folgt $\beta_1=\beta_2$.

3. a) Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie: Für alle $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ gilt

   $$\mathbf{v}\perp\mathbf{w} \iff |\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2=|\mathbf{v}|^2+|\mathbf{w}|^2.$$

   b) Ist V ein komplexer Vektorraum mit dem Skalarprodukt β, so ist die Behauptung aus a) nicht korrekt.

4. Fordert man in Definition 2.5 (Körper) lediglich, dass $K\backslash\{0\}$ bezüglich der Verknüpfung $\cdot$ eine Gruppe ist, also nicht notwendig abelsch, so erhält man einen Schiefkörper (alle anderen Bedingungen sind genau wie in 2.5). Sei nun

   $$H := \{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

   die Menge der *Quaternionen* mit der komponentenweise definierten Addition

   $$(a+bi+cj+dk)+(e+fi+gj+hk)=(a+e)+(b+f)i+(c+g)j+(d+h)k.$$

   a) Für die Multiplikation soll $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ gelten. Bestimmen Sie die Werte ij, ik, ji, jk, ki und kj.

   b) Für ein Quaternion $h=a+bi+cj+dk$ definiert man das Konjugierte $h^*=a-bi-cj-dk$. Berechnen Sie hh^* und anschließend für $h\neq 0$ das Inverse bezüglich der Multiplikation.

   c) Zeigen Sie: $(H,+,\cdot)$ ist ein Schiefkörper. Dabei dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass $(H,+)$ eine abelsche Gruppe ist.

   d) Berechnen Sie das Quadrat eines beliebigen Quaternions und zeigen Sie damit, dass die Gleichung $h^2=-1$ unendlich viele Lösungen in H besitzt.