Sommersemester 2008

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: Do, 17.04.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 5x_1\overline{y_1} - 2x_1\overline{y_2} - 2x_2\overline{y_1} + 5x_2\overline{y_2} - 2x_2\overline{y_3} - 2x_3\overline{y_2} + 5x_3\overline{y_3} + \ldots$$
$$\ldots + 5x_{n-1}\overline{y_{n-1}} - 2x_{n-1}\overline{y_n} - 2x_n\overline{y_{n-1}} + x_n\overline{y_n}$$

ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

2. Orthonormieren Sie

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ i\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

bezüglich des Standardskalarproduktes.

3. Sei $n \geq 2$. Sei $V = \mathfrak{M}(n;\mathbb{R})$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit reellen Koeffizienten.

   Zeigen Sie: Durch $\gamma(A,B) = \mathrm{Spur}\,(A \cdot B)$ wird eine symmetrische Bilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert.

   Hinweis: Für $A = (a_{ij})$ ist Spur $A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

   γ ist nicht ausgeartet, d.h. zu jeder Matrix $A \neq 0$ existiert eine Matrix B mit $\gamma(A,B) \neq 0$. Geben Sie eine Matrix $A \neq 0$ an mit $\gamma(A,A) = 0$.

4. Sei (V,β) ein unitärer Raum. Sei U ein Unterraum von V und π_u die orthogonale Projektion von V auf U. Sei $\mathbf{v} \in V$.

   Zeigen Sie: Für einen Vektor $\mathbf{u} \in U$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

   (i) $\pi_u(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$

   (ii) $\forall \mathbf{w} \in U$ mit $\mathbf{w} \neq \mathbf{u}$ gilt $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.

   Hinweis: Nur die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist für den Zettel gefordert, $(ii) \Rightarrow (i)$ ist eine Bonusaufgabe.