Sommersemester 2008

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: Do, 24.04.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei (V, β) ein unitärer Raum mit $\mathrm{Dim}\, V = n < \infty$. Sei φ ein Endomorphismus von V. Seien a und b Elemente aus $\mathbb{C}$ mit $|a| = |b| = 1$.

   Zeigen Sie: $a\varphi + b\varphi^*$ ist normal.

2. Sei (V, β) ein unitärer Raum mit $\mathrm{Dim}\, V = n < \infty$. Sei U ein Unterraum von V und sei π_u die orthogonale Projektion von V auf U.

   Zeigen Sie: $\pi_u = \pi_u^*$.

3. Sei (V, β) ein unitärer Raum mit $\mathrm{Dim}\, V = n < \infty$. Sei φ ein normaler Endomorphismus von V.

   Zeigen Sie:

   (i) $V = \mathrm{Bild}\,(\varphi) \oplus \mathrm{Kern}\,(\varphi)$.

   (ii) $\mathrm{Kern}\,(\varphi \circ \varphi) = \mathrm{Kern}\,(\varphi)$.

4. Sei (V, β) ein unitärer Raum der Dimension n.

   (i) Zeigen Sie: Die Norm erfüllt die Parallelogrammgleichung:

   $$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = 2(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2).$$

   (ii) Ist $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$ eine Basis von V und hat der Vektor $\mathbf{v} \in V$ die Darstellung

   $$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a_1} + \ldots + v_n\mathbf{a_n} \qquad \text{mit } v_i \in \mathbb{C}\,(1 \le i \le n),$$

   so setzen wir

   $$|\mathbf{v}| = \max_{1 \le i \le n} |v_i|.$$

   Geben Sie ein Beispiel dafür an, daß die "Länge" $|\mathbf{v}|$ nicht die Parallelogrammgleichung erfüllt.