Sommersemester 2008

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: *Mi, 30.04.2008*, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie eine Matrix $P \in \mathfrak{M}(3; \mathbb{R})$, so daß PAP^{-1} Diagonalgestalt hat.

2. Sei (V, β) ein unitärer Raum. Sei $\mathbf{e_1}, \ldots \mathbf{e_n}$ ein Orthonormalsystem in V.

Zeigen Sie:

Für jeden Vektor $\mathbf{v} \in V$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |\beta(\mathbf{v}, \mathbf{e_i})|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2.$$

(*Anleitung:* Sei $U =< \mathbf{e_1}, \ldots \mathbf{e_n} >$. Zeigen Sie zunächst: $\mathbf{v}$ läßt sich in eindeutiger Weise in der Form

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e_1} + \ldots + \alpha_n \mathbf{e_n} + \mathbf{w}$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ und mit $\mathbf{w} \in U^\perp$ schreiben.)

3. Sei (V, β) ein endlichdimensionaler unitärer Raum. Sei φ ein normaler Endomorphismus von V.

Zeigen Sie: Sind $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V$ Eigenvektoren von φ zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2, und gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so sind $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ orthogonal.

4. Sei φ der von

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

induzierte Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.

(i) Zeigen Sie: φ ist normal.

(ii) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich derer φ eine Koordinatenmatrix wie in Satz 11.17 hat.