Sommersemester 2008

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: Do, 08.05.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei (V, β) ein unitärer Raum. Sei φ ein Endomorphismus von V, so daß für den adjungierten Endomorphismus φ^* gilt: $\varphi^* = -\varphi$.

   Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von φ, so gilt $\mathrm{Re}\lambda = 0$.

2. (i) Sei $A \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.
   Zeigen Sie: $E_n + \lambda A$ ist nichtsingulär.

   (ii) Sei $A \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{R})$ und gelte $A^t = -A$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Zeigen Sie: $E_n + \lambda A$ ist nichtsingulär.
   (*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 1.)

3. Sei (V, β) ein n-dimensionaler unitärer Raum. Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

   Zeigen Sie: $\varphi \circ \varphi^*$ ist selbstadjungiert und hat nur nichtnegative Eigenwerte.

4. Sei (V, β) ein endlichdimensionaler unitärer Raum. Sei φ ein selbstadjungierter Endomorphismus von V, dessen Eigenwerte sämtlich positiv seien. Zeigen Sie:

   (i) φ und $\varphi \circ \varphi$ besitzen dieselben Eigenvektoren.

   (ii) Die Eigenwerte von $\varphi \circ \varphi$ sind die Quadrate der Eigenwerte von φ.