Sommersemester 2008

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: Do, 15.05.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei (V, β) ein unitärer Raum mit Dim $V = n < \infty$. Sei φ ein Automorphismus von V. Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$ von V, so daß auch $\varphi(\mathbf{e_1}), \ldots, \varphi(\mathbf{e_n})$ eine Orthonormalbasis ist.

   (ii) Für jede Orthonormalbasis $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$ von V gilt: $\varphi(\mathbf{e_1}), \ldots, \varphi(\mathbf{e_n})$ ist eine Orthonormalbasis.

2. Sei (V, β) ein euklidischer Vektorraum mit Dim $V = n < \infty$. Sei φ ein orthogonaler Automorphismus von V.

   Zeigen Sie: Es gilt $|\mathrm{Spur}\ \varphi| \leq n$.

   (Dabei sei die Spur von φ die Spur der Koordinatenmatrix von φ bezüglich einer Basis von V.)

   Wann gilt $|\mathrm{Spur}\ \varphi| = n$?

3. Bestimmen Sie zu der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   eine orthogonale Matrix B und eine symmetrische Matrix C, so daß gilt

$$A = B \cdot C.$$

4. Sei V ein komplexer (bzw. reeller) Vektorraum mit Dim $V = n$. Sei $\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}$ eine Basis von V. Sei $B = (b_{\mu\nu})_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{C})$ (bzw. $\mathfrak{M}(n; \mathbb{R})$).

   Für Vektoren $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b_1} + \ldots + v_n \mathbf{b_n} \in V$ und $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{b_1} + \ldots + w_n \mathbf{b_n} \in V$ setzen wir

$$(*) \quad \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} v_\mu b_{\mu\nu} \overline{w_\nu}.$$

   Zeigen Sie: Wird durch $(*)$ ein Skalarprodukt definiert, so ist die Matrix B hermitesch (bzw. symmetrisch) und sämtliche Eigenwerte von B sind positiv.