Sommersemester 2008

## 7. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: *Mi, 21.05.2008*, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei $(V, \beta)$ ein unitärer Raum mit $\mathrm{Dim}\, V = n < \infty$.

   Zeigen Sie: Zu jedem Automorphismus $\varphi$ von $V$ gibt es einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten Automorphismus $\psi$ und einen eindeutig bestimmten unitären Automorphismus $\chi$, so daß gilt

$$\varphi = \psi \circ \chi.$$

2. Geben Sie ein Beispiel einer Menge $M$ und einer binären Relation $R$ auf $M$, so daß gilt:

   (i) $R$ ist reflexiv aber nicht symmetrisch und nicht transitiv

   (ii) $R$ ist symmetrisch aber nicht reflexiv und nicht transitiv

   (iii) $R$ ist transitiv aber nicht reflexiv und nicht symmetrisch

   (iv) $R$ ist reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv

   (v) $R$ ist reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch

   (vi) $R$ ist symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv.

3. Sei $V$ ein $n$-dimensionaler euklidischer Raum. Seien $\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}$ und $\mathbf{b'_1}, \dots, \mathbf{b'_n}$ Basen von $V$. Sei $\varphi$ der durch $\varphi(\mathbf{b_i}) = \mathbf{b'_i}$ definierte Automorphismus von $V$. $\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}$ und $\mathbf{b'_1}, \dots, \mathbf{b'_n}$ heißen gleich orientiert genau dann, wenn $\mathrm{Det}\, \varphi > 0$ gilt, andernfalls entgegengesetzt orientiert.

   a) Zeigen Sie: Die Orientierung induziert auf der Menge der Basen von $V$ eine Äquivalenzrelation. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

   b) Sei $\psi$ eine Drehung eines zweidimensionalen euklidischen Raums $V$. Sei $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie:

      Zu $\psi$ gibt es einen eindeutig bestimmten Winkel $\alpha$ mit $0 \le \alpha < 2\pi$, so daß $\psi$ bezüglich $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ die Koordinatenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

      hat. Für jede Orthonormalbasis $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}$ von $V$ welche gleich orientiert ist wie $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ gilt: $\psi$ hat auch bezüglich $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}$ die Koordinatenmatrix $A$.

bitte wenden!!

4. Sei $(V, \beta)$ ein $n$-dimensionaler unitärer (bzw. euklidischer) Vektorraum. Sei $\varphi$ ein selbstadjungierter Endomorphismus.

   Zeigen Sie: Es gibt Unterräume $U_1, \ldots, U_r$ von $V$, so daß

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$$

   und so daß $U_\rho \perp U_\sigma$ für $1 \leq \rho < \sigma \leq r$, und es gibt reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, so daß gilt

$$\varphi = \lambda_1 \pi_{u_1} + \ldots + \lambda_r \pi_{u_r}.$$

   Dabei sei für einen Unterraum $U$ $\pi_u$ die orthogonale Projektion von $V$ auf $U$.