Sommersemester 2008

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: Do, 29.05.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Seien (V, β) und (W, γ) unitäre Vektorräume. Sei
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine Abbildung, für welche für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V$ gilt
$$\beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) = \gamma(\varphi(\mathbf{v_1}), \varphi(\mathbf{v_2})).$$
Zeigen Sie: φ ist linear.

2. Seien (V, β) und (W, γ) euklidische Vektorräume mit Dim $V = n < \infty$. Sei
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine von der Nullabbildung verschiedene lineare Abbildung mit der folgenden Eigenschaft:
$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \text{ mit } \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \text{ gelte } \varphi(\mathbf{u}) \perp \varphi(\mathbf{v}).$$
Zeigen Sie:

   (i) Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ gilt
$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| \Longrightarrow \|\varphi(\mathbf{u})\| = \|\varphi(\mathbf{v})\|.$$

   (ii) Es gibt eine orthogonale Abbildung $\psi : V \longrightarrow W$ und ein Element $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß gilt
$$\forall \mathbf{v} \in V : \varphi(\mathbf{v}) = \alpha \cdot \psi(\mathbf{v}).$$

bitte wenden!!

3. Sei (V, β) ein euklidischer Vektorraum. Eine Abbildung

$$S : V \longrightarrow V$$

heißt starre Bewegung genau dann, wenn für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ gilt

$$\|S(\mathbf{u}) - S(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Zeigen Sie:

(i) Orthogonale Endomorphismen von V sind starre Bewegungen. Translationen von V sind starre Bewegungen. Dabei heißt eine Abbildung $T : V \longrightarrow V$ Translation genau dann, wenn es einen Vektor $\mathbf{b} \in V$ gibt, so daß für alle $\mathbf{v} \in V$ gilt

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{b}.$$

(Wir schreiben dann $T_{\mathbf{b}}$ statt T.)

(ii) Eine starre Bewegung S mit $S(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ist eine orthogonale Abbildung. (Zum Beweis darf die Aussage von Aufgabe 1 verwendet werden.)

(iii) Ist S eine starre Bewegung, so gibt es eine Translation $T_{\mathbf{b}}$ und eine orthogonale Abbildung $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ mit

$$S = T_{\mathbf{b}} \circ \varphi.$$

(*Anleitung:* Zeigen Sie: Sind S_1 und S_2 starre Bewegungen, so ist auch $S_1 \circ S_2$ eine starre Bewegung. Kombinieren Sie diese Aussage mit der Aussage aus (ii).)