Sommersemester 2008

## 9. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: Do, 05.06.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei $K$ ein Körper. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $A \in \mathfrak{M}(n; K)$ nichtsingulär. Zeigen Sie:
   $A$ ist diagonalisierbar genau dann wenn $A^{-1}$ diagonalisierbar ist.

2. Sei $K$ ein Körper. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
   Für eine Matrix $A \in \mathfrak{M}(n; K)$ mit Rang $A = r > 0$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

   (i) $A$ ist idempotent

   (ii) $A$ ist ähnlich zu $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Sei
   $$A = \begin{pmatrix} 25 & 34 & 18 \\ -14 & -19 & -10 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(3; \mathbb{R}).$$

   (i) Zeigen Sie: $A$ ist über $\mathbb{R}$ zerfallend.

   (ii) Bestimmen Sie zu $A$ eine äquivalente Matrix entsprechend Satz 13.21.

4. Sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit Dim $V = n \geq 2$. Sei $\varphi$ ein Endomorphismus von $V$ mit Rang $\varphi = 1$.

   Zeigen Sie: Entweder ist $\varphi$ diagonalisierbar oder $\varphi$ ist nilpotent.