Sommersemester 2008

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: Do, 12.06.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Sei φ ein Endomorphismus von V, so daß V φ-zyklisch ist. Sei ψ ein Endomorphismus von V für den gilt $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

   Zeigen Sie: Es gibt Elemente $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ mit

   $$\psi = a_0 \mathrm{id} + a_1\varphi + \ldots + a_{n-1}\varphi^{n-1}.$$

2. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Sei φ ein diagonalisierbarer Endomorphismus von V. Zeigen Sie:

   (i) Falls V φ-zyklisch ist, so hat φ n verschiedene Eigenwerte.

   (ii) φ habe n verschiedene Eigenwerte, und $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$ sei eine aus Eigenvektoren bestehende Basis von V. Dann ist $\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \ldots + \mathbf{a_n}$ ein φ-zyklischer Vektor für V.

3. Seien W ein Vektorraum und U, V Unterräume von W. Zeigen Sie:
   $(U+V)\big/U \cap V$ ist isomorph zu $U\big/U \cap V \oplus V\big/U \cap V$.

4. Seien V, V' Vektorräume und $U \subset V$, $U' \subset V'$ Unterräume. Sei $\varphi : V \to V'$ eine lineare Abbildung, und seien $\pi_u : V \to V\big/U$ sowie $\pi_{u'} : V' \to V'\big/U'$ die kanonischen Projektionen.

   Zeigen Sie: Genau dann existiert eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi} : V\big/U \to V'\big/U'$ mit $\tilde{\varphi} \circ \pi_u = \pi_{u'} \circ \varphi$, wenn gilt $\forall \mathbf{u} \in U : \varphi(\mathbf{u}) \in U'$.