Sommersemester 2008

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Abgabe: Do, 26.06.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei A eine Matrix in $\mathfrak{M}(6;\mathbb{C})$ mit dem charakteristischen Polynom $(x+2)^4(x-1)^2$. Welche Möglichkeiten gibt es für die Jordansche Normalform von A? Geben Sie jeweils das zugehörige Minimalpolynom an.

2. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen aus $\mathfrak{M}(3;\mathbb{C})$ die Jordansche Normalform:

   (i) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

   (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

   (iii) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Sei $N \in \mathfrak{M}(3;\mathbb{C})$ eine nilpotente Matrix. Zeigen Sie:

   (i) $A = E_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ ist eine Quadratwurzel von $E_3 + N$.

   (ii) Folgern Sie aus (i):
   Für jedes $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ hat die Matrix $cE_3 + N$ in $\mathfrak{M}(3;\mathbb{C})$ eine Quadratwurzel.

4. Wo liegt der Fehler im folgenden „Beweis"?

   Sei $A \in \mathfrak{M}(n;\mathbb{C})$, und gelte $A^t = -A$. Dann folgt $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

   „Beweis": Sei J die Jordansche Normalform von A.
   Wegen $A^t = -A$ gilt $J^t = -J$. Andererseits ist J eine Dreiecksmatrix.
   Wegen $J^t = -J$ folgt $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. A ist ähnlich zu J und $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

   Somit gilt $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

   Geben Sie ein Beispiel an für eine Matrix $A \in \mathfrak{M}(n;\mathbb{C})$ mit $A \neq \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ und $A^t = -A$.