

Kompressionsraten für Gabor-Frames

Oberseminar Numerik und Optimierung

Sven Heuer

Philipps-Universität Marburg

12. August 2020

Wie groß sind unsere Datenmengen?

- Im Wald: 45 Mikrofone, die jeweils ~ 10 Stunden aufnehmen
- Sampling Rate: 48000 Hz
- Bits pro Sample: 16

Wie groß sind unsere Datenmengen?

- Im Wald: 45 Mikrofone, die jeweils ~ 10 Stunden aufnehmen
- Sampling Rate: 48000 Hz
- Bits pro Sample: 16
- Bits pro Tag: $45 \cdot 10 \cdot 3600 \cdot 48000 \cdot 16 \approx 10^{12}$
- Pro Tag: 155.52 GB
- Ungefähr jede Woche ein Terabyte!

Definition

Short-time Fourier transform (STFT) von f zur Fensterfunktion g :

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Modulationsräume

Definition

Short-time Fourier transform (STFT) von f zur Fensterfunktion g :

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Definition

Für $0 \neq g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Modulationsraum:

$$\mathcal{M}^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid V_g f \in L^p(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

Norm:

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |V_g f(x, \omega)|^p dx d\omega \right)^{1/p}.$$

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Voraussetzungen:

- $p \in (0, 2)$
- Λ Gitter, sodass Gabor-Atome Frame bilden
- $g \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R})$, \tilde{g} duales Fenster
- $f \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R})$

Satz

Für $\mu > 0$, setze $I_\mu = \{\lambda \in \Lambda \mid |\langle f, \tilde{g}_\lambda \rangle| \geq \mu\}$ und

$$f_\mu = \sum_{\lambda \in I_\mu} \langle f, \tilde{g}_\lambda \rangle g_\lambda.$$

Dann gilt (mit $N = \#I_\mu$):

$$\|f - f_\mu\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq C_2^2 \|f\|_{\mathcal{M}^p(\mathbb{R})}^2 N^{1-2/p}.$$

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Definition (B-Splines)

$$N_1 = \chi_{[0,1)},$$
$$N_k = N_{k-1} * N_1, \quad k \geq 2.$$

Satz

Sei g der B-Spline der Ordnung k . Dann gilt

$$g \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R})$$

für alle $p > 1/k$.

Bemerkung: Die Aussage gilt auch für gewichtete Modulationsräume, bei denen das Gewicht nicht von der Frequenz abhängt.

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Lemma (Galperin/Samarah, 2004)

Die Modulationsnorm mit dem Fenster g ist äquivalent zu der mit einem Fenster aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, falls

$$g \in \bigcup_{\substack{r,s > 1/p \\ 1 \leq p^* < \infty}} \mathcal{M}_{w_{r,s}}^{p^*}$$

mit

$$w_{r,s}(x, \omega) = (1 + |x|)^r (1 + |\omega|)^s.$$

Lemma (Galperin/Samarah, 2004)

Die Modulationsnorm mit dem Fenster g ist äquivalent zu der mit einem Fenster aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, falls

$$g \in \bigcup_{\substack{r,s > 1/p \\ 1 \leq p^* < \infty}} \mathcal{M}_{w_{r,s}}^{p^*}$$

mit

$$w_{r,s}(x, \omega) = (1 + |x|)^r (1 + |\omega|)^s.$$

Wir müssen also zeigen:

$$V_g g \in \mathcal{L}_{w_{r,s}}^{p^*}$$

Lemma (Gröchenig, 2001)

$$V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x).$$

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Lemma (Gröchenig, 2001)

$$V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x).$$

Also:

$$\begin{aligned} |V_g g(x, \omega)| &= |V_{\hat{g}} \hat{g}(\omega, -x)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) \overline{\hat{g}(t - \omega)} e^{2\pi i x t} dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-it/2 + i(t-\omega)/2} f_{\omega}(t) e^{2\pi i x t} dt \right|, \end{aligned}$$

mit

$$f_{\omega}(t) = \left(\frac{\sin(t/2) \cdot \sin((t-\omega)/2)}{t/2 \cdot (t-\omega)/2} \right)^k.$$

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Beweis (3)

Stand:

$$|V_g g(x, \omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f_{\omega}(t) e^{2\pi i x t} dt \right|$$

Definition

$$f_{\omega}(t) = \left(\frac{\sin(t/2) \cdot \sin((t - \omega)/2)}{t/2 \cdot (t - \omega)/2} \right)^k.$$

Beweis (3)

Stand:

$$|V_g g(x, \omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f_{\omega}(t) e^{2\pi i x t} dt \right|$$

Definition

$$f_{\omega}(t) = \left(\frac{\sin(t/2) \cdot \sin((t - \omega)/2)}{t/2 \cdot (t - \omega)/2} \right)^k.$$

Also:

$$\begin{aligned} \|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_{r,s}}^{p^*}}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |V_g g(x, \omega)|^{p^*} w_{r,s}(x, \omega)^{p^*} dx d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_{\omega}(-x)|^{p^*} w_{r,s}(x, \omega)^{p^*} dx d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_{\omega}(x)|^{p^*} (1 + |x|)^{rp^*} (1 + |\omega|)^{sp^*} dx d\omega \end{aligned}$$

Beweis (4)

Stand:

$$\|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_r, s}^{p^*}}^{p^*} = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|)^{sp^*} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_\omega(x)|^{p^*} (1 + |x|)^{rp^*} dx \right) d\omega$$

Lemma

$$f_\omega(t) = (\text{sinc}(t/2) \cdot \text{sinc}((t - \omega)/2))^k,$$

$$(T_\omega f)^\wedge = M_{-\omega} \hat{f},$$

$t \mapsto \text{sinc}(t)$ ist frequenzbeschränkt (Paley-Wiener).

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Beweis (4)

Stand:

$$\|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_r,s}^{p^*}}^{p^*} = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|)^{sp^*} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_\omega(x)|^{p^*} (1 + |x|)^{rp^*} dx \right) d\omega$$

Lemma

$$f_\omega(t) = (\text{sinc}(t/2) \cdot \text{sinc}((t - \omega)/2))^k,$$

$$(T_\omega f)^\hat{} = M_{-\omega} \hat{f},$$

$t \mapsto \text{sinc}(t)$ ist frequenzbeschränkt (Paley-Wiener).

Damit:

$$\|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_r,s}^{p^*}}^{p^*} \lesssim \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|)^{sp^*} \|\hat{f}_\omega\|_{\mathcal{L}^{p^*}}^{p^*} d\omega$$

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Beweis (5)

Stand:

$$\|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_r, s}^{p^*}}^{p^*} \lesssim \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|)^{sp^*} \|\hat{f}_\omega\|_{\mathcal{L}^{p^*}}^{p^*} d\omega.$$

Lemma (Haußdorff-Young-Ungleichung)

Für $2 \leq p^* < \infty$ und $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\|\hat{f}_\omega\|_{\mathcal{L}^{p^*}} \leq \|f_\omega\|_{\mathcal{L}^q}$$

Also:

$$\|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_r, s}^{p^*}}^{p^*} \lesssim \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|)^{sp^*} \|f_\omega\|_{\mathcal{L}^q}^{p^*} d\omega.$$

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Definition

$$N_\omega = \left\{ t \in \mathbb{R}, \left| t - \frac{\omega}{2} \right| \leq \frac{|\omega|}{4} \right\}.$$

Damit: $|t| \geq \frac{|\omega|}{4}$ für $t \in N_\omega$. Also:

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Definition

$$N_\omega = \left\{ t \in \mathbb{R}, \left| t - \frac{\omega}{2} \right| \leq \frac{|\omega|}{4} \right\}.$$

Damit: $|t| \geq \frac{|\omega|}{4}$ für $t \in N_\omega$. Also:

$$\begin{aligned} \|f_\omega\|_{\mathcal{L}^q}^q &\leq 2 \int_{N_\omega} \left| \frac{1}{t} \right|^{kq} \left| \frac{\sin(t - \omega/2)}{t - \omega/2} \right|^{kq} dt \\ &\quad + 2 \int_{N_\omega^c} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^{kq} \left| \frac{1}{t - \omega/2} \right|^{kq} dt \\ &\leq 2 \cdot 4^{kq} |\omega|^{-kq} \int_{N_\omega} \left| \frac{\sin(t - \omega/2)}{t - \omega/2} \right|^{kq} dt \\ &\quad + 2 \cdot 4^{kq} |\omega|^{-kq} \int_{N_\omega^c} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^{kq} dt \\ &\lesssim |\omega|^{-kq}. \end{aligned}$$

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Stand:

$$\begin{aligned}\|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_r, s}^{p^*}}^{p^*} &\lesssim \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|)^{sp^*} \|f_\omega\|_{\mathcal{L}^q}^{p^*} d\omega, \\ \|f_\omega\|_{\mathcal{L}^q}^q &\lesssim |\omega|^{-kq}.\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_r, s}^{p^*}}^{p^*} &\lesssim \int_{|\omega| > 1} \left(\frac{(1 + |\omega|)^s}{|\omega|^k} \right)^{p^*} d\omega \\ &\quad + \int_{|\omega| \leq 1} (1 + |\omega|)^{sp^*} \|f_\omega\|_{\mathcal{L}^q}^{p^*} d\omega \\ &\lesssim 2^{sp^*} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|)^{(s-k)p^*} d\omega + C.\end{aligned}$$

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Beweis (8)

Insgesamt:

$$\|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_r,s}^{p^*}}^{p^*} \lesssim \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|)^{(s-k)p^*} d\omega.$$

Also $\|V_g g\|_{\mathcal{L}_{w_r,s}^{p^*}}^{p^*} < \infty$, falls

$$(s - k)p^* < -1.$$

Beweis (8)

Insgesamt:

$$\|V_g g\|_{\mathcal{L}^{p^*}_{w_r,s}}^{p^*} \lesssim \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|)^{(s-k)p^*} d\omega.$$

Also $\|V_g g\|_{\mathcal{L}^{p^*}_{w_r,s}}^{p^*} < \infty$, falls

$$(s - k)p^* < -1.$$

Eine Bedingung war $s > 1/p$, also

$$1/p^* < k - s < k - 1/p.$$

p^* beliebig groß, also insgesamt

$$k > 1/p.$$

□

Satz

$$\log(\|f - f_\mu\|_{\mathcal{L}_2}^2) \leq \log(C_2^2 \|f\|_{\mathcal{M}^p(\mathbb{R})}^2) + \log(N) \cdot (1 - 2/p).$$

Zunächst: Synthetisches Signal, einfache Gauß-Kurve.

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

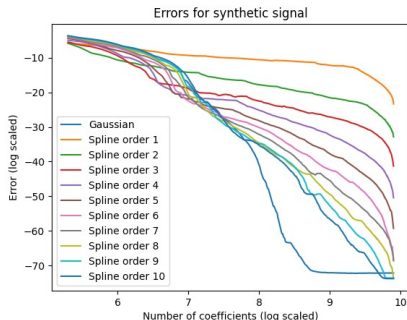
Simulationen

Ausblick

Satz

$$\log(\|f - f_\mu\|_{\mathcal{L}_2}^2) \leq \log(C_2^2 \|f\|_{\mathcal{M}^p(\mathbb{R})}^2) + \log(N) \cdot (1 - 2/p).$$

Zunächst: Synthetisches Signal, einfache Gauß-Kurve.



Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

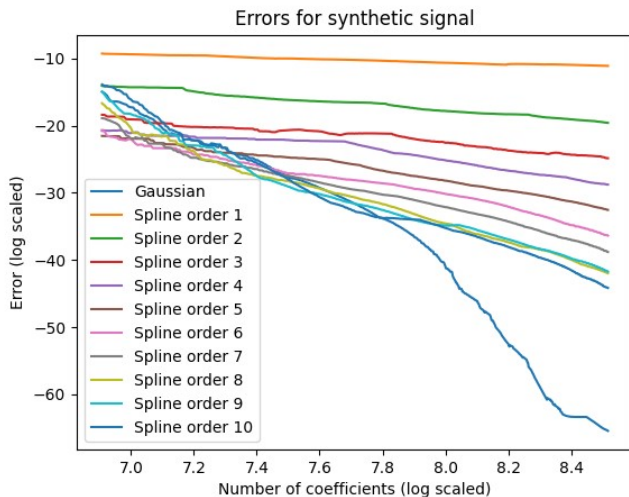
Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Simulationen - synthetisches Signal (2)



Simulationen - synthetisches Signal (3)

Bestimmen von p per linearer Regression:

Fenster	p (Simulation)	p (Erwartung)
Spline Ordnung 1	0.9318	1
Spline Ordnung 2	0.4538	0.5
Spline Ordnung 3	0.4170	0.3333
Spline Ordnung 4	0.3068	0.25
Spline Ordnung 5	0.2540	0.2
Spline Ordnung 6	0.2066	0.1667
Spline Ordnung 7	0.1715	0.1429
Spline Ordnung 8	0.1366	0.125
Spline Ordnung 9	0.1340	0.1111
Spline Ordnung 10	0.1147	0.1
Gauß-Kurve	0.0569	≈ 0

Tabelle: Werte von p aus der Kompressionsrate

Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

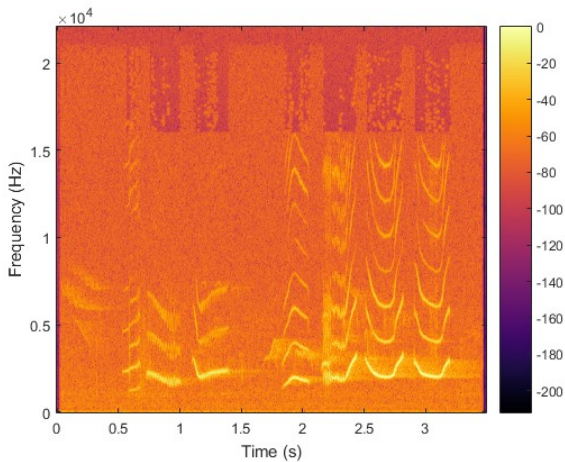
Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Simulationen - reelles Signal (1)

Spektrogramm Amselgesang:



Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

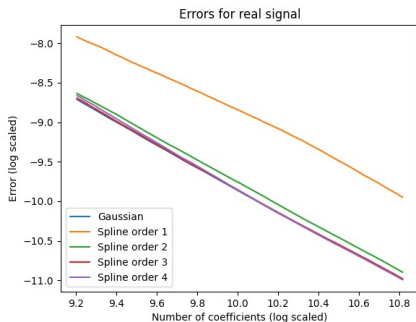
Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Simulationen - reelles Signal (1)



Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer

Motivation

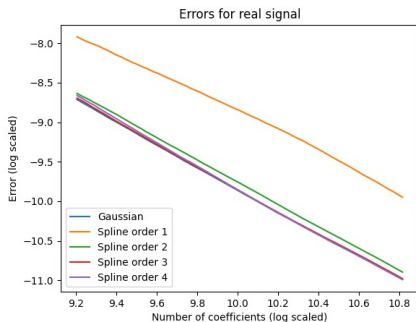
Kompression mit
Gabor-Frames

Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

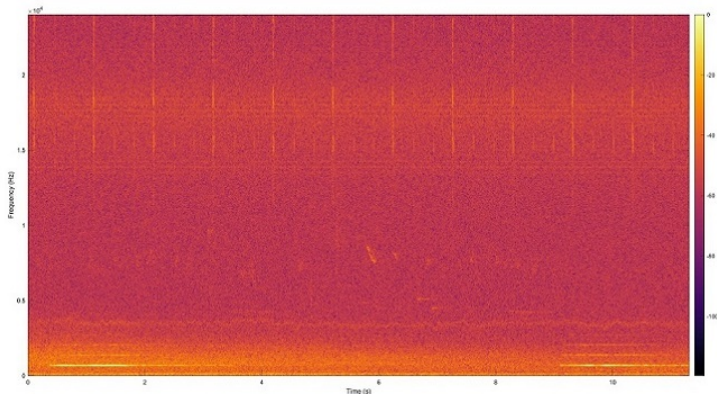
Simulationen - reelles Signal (1)



Fenster	ρ (Simulation)
Spline Ordnung 1	0.8844
Spline Ordnung 2	0.8322
Spline Ordnung 3	0.8317
Spline Ordnung 4	0.8207
Gauß-Kurve	0.8342

Können wir das so direkt übernehmen?

Aufnahme aus dem Wald (Züge, Zugpfeife, Vogel):



Motivation

Kompression mit
Gabor-Frames

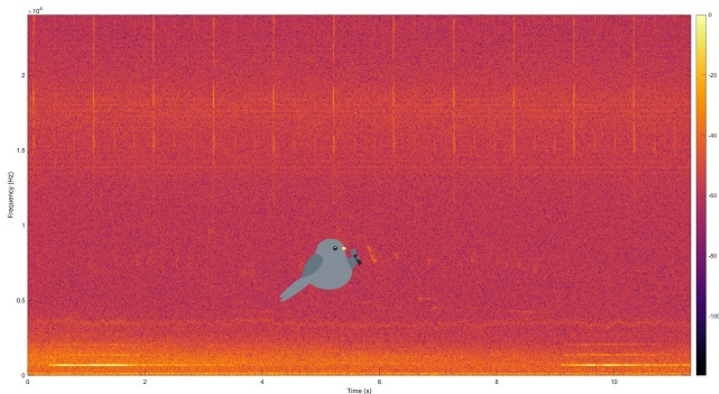
Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

Bevor jemand fragt...

Eine höchst wissenschaftliche Visualisierung des
Vogelgesangs in der Waldaufnahme:



Kompressionsraten
für Gabor-Frames

Sven Heuer


Motivation


Kompression mit
Gabor-Frames


Splines in Modula-
tionsräumen

Simulationen

Ausblick

 Y. V. Galperin, S. Samarah.
Time-frequency analysis on modulation spaces
 $M_m^{p,q}$, $0 < p, q \leq \infty$. Applied and Computational
Harmonic Analysis 16(1), 1-18. 2004.

 K. Gröchenig.
Foundations of Time-Frequency Analysis.
Birkhäuser/Springer, New York. 2001.

 G. Kutyniok, D. Labate (Eds).
Shearlets. Multiscale Analysis for Multivariate Data.
Birkhäuser Basel. 2012.