Fachbereich Mathematik und Informatik **Sommersemester 2009**
der Philipps-Universität Marburg Marburg, 10. Juli 2009
Prof. Dr. Bernhard Schmitt **Manuel Werner** 9:15-11:45 Uhr

Klausur zur Numerik I

Name:	Vorname:
Matrikel-Nr.:	Studiengang:
Anzahl abgegebener Blätter:	

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt.
Die Klausur ist mit 9 Punkten bestanden.

Aufgabe 1: (3)

a) Setzen Sie den Ausdruck

$$F(x) = 1 - \frac{x}{1+x}, \quad x \geq 0$$

zusammen aus elementaren Abbildungen zwischen Räumen geeigneter Dimensionen, $F = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$. Berechnen Sie für $z := F(x) = \phi_3(y)$ die Konditionszahl κ_x bezogen auf das Argument x und die Kondition κ_y bezogen auf das Zwischenergebnis $y = \phi_2(\phi_1(x))$.

b) Wie verhalten sich die Konditionszahlen für $x \to \infty$? Formulieren Sie den Ausdruck für F so um, dass für große x keine Auslöschung auftritt.

Aufgabe 2: (5)

a) Geben Sie zu den Datenpaaren

$x_i =$	0	1	2
$y_i =$	1	0.5	-0.5

das Newton-Interpolationspolynom p_2 an, welches die Daten in x_0, x_1, x_2 interpoliert.

b) Werten Sie das Interpolationspolynom p_2 aus a) bei $x = 0.25$ mittels des Neville-Algorithmus aus.

c) Geben Sie die Lagrange-Darstellung von p_2 an.

d) Die Daten in Teil a) entsprechen denen bei Interpolation der Funktion $f(x) := \cos((\pi/3)x)$. Geben Sie eine realistische Schranke für das Maximum des Fehlers $|p_2 - f|$ des Polynoms p_2 im Intervall $[0, 2]$ an.

Aufgabe 3: (3)

Es sei $s(x)$ ein kubischer Spline im Teilintervall $[0, h]$ in Bézier-Bernstein-Darstellung. Stellen Sie dessen erste Ableitung dar mit Hilfe der Differenzen $b_1 - b_0$, $b_2 - b_1$, $b_3 - b_2$ und beweisen Sie damit die Schranke

$$\max_{x \in [0,h]} |s'(x)| \leq \frac{3}{h} \max_{i=1}^{3} |b_i - b_{i-1}|.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (3)

Mit $u, v \in \mathbb{R}^n$ wird die Matrix $B := uv^T$ vom Rang 1 definiert, sie besitzt daher höchstens einen nichttrivialen Eigenwert.

a) Berechnen Sie die Matrixnormen $\|B\|_\infty$, $\|B\|_1$, $\|B\|_2$ und stellen Sie diese durch geeignete Normen von u, v dar.

b) Berechnen Sie den Spektralradius $\varrho(B)$. Unter welcher Bedingung an u und v gilt $\varrho(B) = 0$?

Aufgabe 5: (3)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung (absolutes Maximum). Geben Sie auch die Permutationsmatrix P an, so dass $A = PLR$.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_\infty(A)$ und zeigen Sie damit, dass das Gleichungssystem mit der gestörten Matrix

$$\begin{pmatrix} -1.02 & 1.99 & 1.01 \\ 2.02 & 1 & 1.02 \\ 1.01 & -1.03 & 1.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b$$

eindeutig lösbar ist für $b \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 6: (3)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $a > 0$ konvergiert jeweils das Einzelschrittverfahren und das Gesamtschrittverfahren?

b) Führen Sie für das lineare Gleichungssystem $Ax = (0, 1)^\top$ einen Schritt des Gesamtschrittverfahrens durch für $a = 5$ mit Startwert $x^{(0)} = (1, 1)^\top$.

Aufgabe 7: (3)

Weisen Sie nach, dass $\hat{x} = (1, -1)^\top$ die eindeutige Kleinste-Quadrate-Lösung des überbestimmten Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist.