Aufgaben zum Mathematik-Propädeutikum

WiSe 2020, Teil 2

Im zugehörigen Lehrvideo gibt es zwei Sorten von Aufgaben: Kleinere Aufgaben, für die Sie das Video anhalten sollen, und die dann im Video gelöst werden – und andererseits größere Aufgaben, die etwas mehr Nachdenken und Rechnen erfordern. Bitte lösen Sie die kleineren Aufgaben, wenn Sie das Video sehen. Am Ende des Videos können Sie über die Knobelaufgaben nachdenken.

Kleinere Aufgaben

Definition: Für ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sagen wir: a **teilt** b (in Zeichen: $a \mid b$), wenn es ein $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a \cdot x = b$. In dem Fall nennen wir a einen **Teiler** von b und b ein **Vielfaches** von a.

Minute 15:02: Was sind die Teiler von 21?

Minute 45:54: Was ist $23^7\%11$?

Minute 47:38: Kann auch der Exponent in einer Potenz gegen eine kongruente Zahl ersetzt werden? Gilt z.B. $2^{17} \equiv 2^2$ (15)? Prüfen Sie dies und ein paar andere Beispiele.

Minute 1:01:59 Schreiben Sie die Multiplikationstabellen modulo 6, modulo 7 und modulo 8 auf, und vergleichen Sie: Wann taucht in einer Zeile jede Zahl genau einmal auf?

modulo 6

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

modulo 7

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

modulo 8

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Minute 47:38: Prüfen Sie den kleinen Fermatschen Satz, indem Sie folgende Äquivalenzen prüfen:

$$2^6 \overset{?}{\equiv} 2 \quad (6) \qquad 2^7 \overset{?}{\equiv} 2 \quad (7) \qquad 2^8 \overset{?}{\equiv} 2 \quad (8)$$

$$3^6 \overset{?}{\equiv} 3 \quad (6) \qquad 3^7 \overset{?}{\equiv} 3 \quad (7) \qquad 3^8 \overset{?}{\equiv} 3 \quad (8)$$

$$4^6 \overset{?}{\equiv} 4 \quad (6) \qquad 4^7 \overset{?}{\equiv} 4 \quad (7) \qquad 4^8 \overset{?}{\equiv} 4 \quad (8)$$

Satz von Wilson: Sei p eine natürliche Zahl. Dann ist p genau dann eine Primzahl, wenn

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

gilt. (Alternativ kann man auch $(p-1)! \equiv p-1$ schreiben, denn $-1 \equiv p-1$ modulo p.)

Minute 1:28:22: Prüfen Sie den Satz von Wilson an ein paar Beispielen, z.B. $p = 4$, $p = 5$ und $p = 6$.

Aufgaben zum Knobeln und Ausarbeiten

(2.1): Es sei p eine Primzahl mit $p \equiv 2 \pmod 7$. Zeigen Sie: $\dfrac{p+12}{7}$ ist ganzzahlig und nicht durch 3 teilbar.

(2.2): Es sei n eine ungerade Zahl. Zeigen Sie, dass dann $2n+5$ keine Quadratzahl sein kann.

(3.1): Beweisen Sie Lemma 3.2: Sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, so dass m und a teilerfremd sind. Wenn $a \cdot b \equiv a \cdot c \ (m)$ gilt, so ist auch $b \equiv c \ (m)$, d.h. man darf eine Zahl kürzen, wenn sie zum Modul teilerfremd ist.