# Aufgaben zum Vorkurs, SoSe 2021

Andreas Lochmann

## Teil 3

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $4x - 7 < 8x + 4$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $4x^2 - 7 \leq 8x + 4$.

c) Die Betragsstriche sind für reelle Zahlen $x$ definiert als

$$|x| \;:=\; \max(-x,\ x) \;=\; \begin{cases} \phantom{-}x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

dabei ist max die Maximumsfunktion. Beispielsweise ist $|5| = 5$ und $|-3| = 3$.

Bestimmen Sie alle Lösungen von $|x^2 - 3| = |2x - 4| - 4$.

*Zur Kontrolle:* Eine mögliche Lösung ist $x = -1$.

d) Welche Elemente sind in der Menge $A \;:=\; \{n \in \mathbb{N}_0 \;:\; 3n + 5 < 71\}$ enthalten?

e) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$A \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 - x \;<\; 5\} \cap \{x \in \mathbb{R} \;:\; \sqrt{x^2 + 1} \;\geq\; 2 - x\}$$

*Zur Kontrolle:* Die Lösung kommt ganz ohne $x$ aus.

f) Skizzieren Sie die Menge $A \;:=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 < y\}$ in der Ebene.

g) Skizzieren Sie die Menge $A \;:=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2x^2 + y^2 > 3\}$ in der Ebene.

h) Sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit Winkel $\alpha$ im Punkt $A$ und einem rechten Winkel in $B$. Die Seite $\overline{AB}$ soll die Länge 1 besitzen. Sei $D$ ein weiterer Punkt, so dass $\overline{ACD}$ ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck ist, mit einem rechten Winkel in $C$ und erneut einem Winkel $\alpha$ in $A$. Die Geraden $AB$ und $AD$ sollen nicht parallel sein.

Der Winkel $\alpha$ soll so angepasst werden, dass die Gesamtfläche des Vierecks $\overline{ABCD}$ genau 1 ist. Leiten Sie dafür eine Gleichung dritten Grades für $\tan \alpha$ her.

*Hinweis:* Es wird nicht verlangt, dass Sie die Gleichung dritten Grades lösen. Aus theoretischer wie praktischer Sicht reicht es oft aus, ein gegebenes Problem auf die Lösung der Nullstelle eines Polynoms zurückzuführen. Ab diesem Punkt ist man dann auf bekanntem Terrain – man weiß im Grunde, ob und wie man entsprechende Lösungen aufschreiben oder nähern kann, und spezialisierte Verfahren anwenden, die aber mit dem ursprünglichen Problem eigentlich nichts mehr zu tun haben. Insofern kann man das ursprüngliche Problem dann in einem gewissen Sinne als „gelöst“ betrachten.

i) Bestimmen Sie alle Lösungen von $\left| \begin{array}{rcl} x^5 + x^3 - 2 & = & 0 \\ x^6 - 2x + 1 & = & 0 \end{array} \right|$

*Zur Kontrolle:* Eine mögliche Lösung ist $x = 1$.

# Anhang: Mengen

**Mengen** sind Zusammenfassungen von Elementen. Die Elemente sind oft Zahlen, können aber im Grunde alle möglichen mathematischen Objekte sein, also z.B. auch Vektoren, Abbildungen, geometrische Figuren, andere Mengen und vieles mehr.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Objekte zusammenzufassen: Will man die Reihenfolge beachten? Will man zulassen, dass ein Objekt mehrfach auftritt? Für die vier entstehenden Nutzungsfälle definiert man unterschiedliche Begriffe; „Menge“ ist einer davon:

| | Reihenfolge unwichtig | Reihenfolge wichtig |
|---|---|---|
| Anzahl unwichtig | Menge | geordnete Menge |
| Anzahl wichtig | Multimenge | endlicher Fall: Liste, Tupel<br>unendlicher Fall: Folge |

Die Objekte in einer Menge (geordneten Menge, Multimenge, Tupel, Folge) heißen **Elemente** der Menge. Eine Menge weiß also nur, ob ein gegebenes Objekt eines ihrer Elemente ist oder nicht – sie kennt keine Reihenfolge. Ist $x$ ein Element von $A$, so schreiben wir $x \in A$ bzw. $A \ni x$, ansonsten $x \notin A$ bzw. $A \not\ni x$.

**Aufzählende Notation für Mengen:** $\{1, 3, 17\}$ ist die Menge, die nur 1, 3 und 17 enthält.

**Notation für Listen, Tupel und Folgen:** $(1, 3, 17)$ ist ein 3-Tupel (d.h. eine Liste von drei Elementen, die sich auch wiederholen dürfen). Die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$ schreiben wir auch als $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $a_j = \frac{1}{j}$. Ein Tupel mit $n$ Elementen heißt $n$-Tupel. 2-Tupel heißen auch *Paare*, 3-Tupel *Tripel* etc.

**Wichtige Mengen:**

$\emptyset$ = Leere Menge (manchmal auch als $\{\}$ geschrieben)
$\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen ohne Null, also $1, 2, 3, 4, \ldots$
$\mathbb{N}_0$ = Menge der natürlichen Zahlen mit Null, also $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
$\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen, also $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen, also alle (positiven und negativen) Bruchzahlen, einschließlich Null
$\mathbb{R}$ = Menge aller reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$ = Menge aller positiven reellen Zahlen (positiv heißt: auch ohne Null)
$\mathbb{R}_0^+$ = Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen (also positiv oder Null)
$\mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen
$[a, b]$ = Für reelle Zahlen $a$ und $b$: Intervall von (einschließlich) $a$ bis (einschließlich) $b$
$(a, b)$ = Für reelle Zahlen $a$ und $b$: Intervall von (ausschließlich) $a$ bis (ausschließlich) $b$

**Anmerkung:** Einige MathematikerInnen verwenden $\mathbb{N}$ für die natürlichen Zahlen mit Null und $\mathbb{N}^*$ oder $\mathbb{N}^+$ für diejenigen ohne Null; im Zweifel einfach nachfragen!

**Filtern einer Menge:** Ist $A$ eine Menge und $p(x)$ eine Aussage, die von $x \in A$ abhängt, so ist $\{x \in A \ : \ p(x)\}$ die Menge all jener Elemente von $A$, die die Eigenschaft $p(x)$ erfüllen. Es werden also diejenigen Elemente aus $A$ ausgesondert bzw. ausgefiltert, die $p(x)$ erfüllen. Alternativ kann auch die Schreibweise $\{x \in A \mid p(x)\}$ verwendet werden.

**Beispiele:**

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 = 4\} &= \{-2,\ 2\} \\
\{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^2 < 9\} &= \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\} \\
\{2n - 5 \ : \ n \in \mathbb{N}_0\} &= \{-5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\} \\
\{x \in \mathbb{R} \ : \ 4 \leq x \leq 5\} &= [4,\ 5]
\end{aligned}$$

Dies führt direkt auf den Begriff der **Lösungsmenge**: Oftmals ist $p(x)$ eine Gleichung, Ungleichung oder ein System von Gleichungen, und man sucht nach jenen Elementen $x$, die $p(x)$ erfüllen, d.h. Lösungen der jeweiligen Gleichungen sind. Die Menge $\{x \in A \mid p(x)\}$ ist dann genau die Menge dieser Lösungen; wir nennen sie daher auch *Lösungsmenge*.

**1 Definition** Seien $A$ und $B$ Mengen.

**1)** $A \cup B$ (Vereinigungsmenge) ist diejenige Menge, die genau die Elemente enthält, die in $A$ oder in $B$ enthalten sind.

**2)** $A \cap B$ (Schnittmenge) enthält genau die Elemente, die in $A$ und in $B$ enthalten sind.

**3)** $A \setminus B$ (Restmenge, $A$ ohne $B$) enthält genau die Elemente, die in $A$, aber nicht in $B$ enthalten sind.

**4)** $A \times B$ ist die Menge aller Paare $(a, b)$ mit allen Kombinationen von $a \in A$ und $b \in B$. (Entsprechend ist $A \times B \times C$ die Menge aller Tripel $(a, b, c)$ mit $a \in A$, $b \in B$ und $c \in C$ etc.)

**5)** $A \subseteq B$ ist genau dann wahr, wenn jedes Element aus $A$ auch in $B$ auftritt. Dies ist gleichbedeutend mit: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Wir sagen: $A$ ist eine *Untermenge* von $B$.

**6)** $A \supseteq B$ ist genau dann wahr, wenn jedes Element aus $B$ auch in $A$ auftritt (also $B \subseteq A$). Wir sagen: $A$ ist eine *Obermenge* von $B$.

**7)** $A = B$ ist genau dann wahr, wenn $A \subseteq B$ und $A \supseteq B$ gelten, d.h. wenn $A$ genau dieselben Elemente enthält, wie $B$. In diesem Fall gilt also: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

**8)** $A$ und $B$ heißen **disjunkt (zueinander)**, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.

Ist eine Grundmenge $U$ (oft verwendet man auch $\Omega$) gegeben, die alle Elemente enthält, die einen für die gerade vorliegende Rechnung interessieren, so definiert man das **Komplement** einer Menge $A \subseteq U$ als $A^{\complement} := U \setminus A$.

Mengen können **endlich** oder **unendlich** sein. Dabei bezieht man sich auf die Anzahl der Elemente dieser Menge, ihre sogenannte **Kardinalität**. Beispielsweise sind $\mathbb{N}$ und das Intervall $[0, 1]$ unendliche Mengen, wohingegen $\{-2, +2\}$ und $\emptyset$ Beispiele für endliche Mengen sind. Die Kardinalität einer Menge $A$ wird mit verschiedenen Zeichen beschrieben, u.a. $\#A$, $|A|$ oder auch $\mathrm{card}(A)$. Da man auch bei unendlichen Mengen noch verschiedene Arten von Unendlich unterscheidet, benutzt man den Begriff „Kardinalität“ anstelle von „Anzahl“, da man unter einer „Anzahl“ klassischerweise eine natürliche Zahl versteht, und nicht noch verschiedene Versionen von „unendlich“.