Aufgaben zum Vorkurs, WiSe 2020

Andreas Lochmann

Teil 1

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen, d.h. alle reellen Zahlen x, für die die jeweilige Gleichung wahr ist. Zu jeder Gleichung wird von uns *eine* Lösung zur Selbstkontrolle vorgegeben – prüfen Sie, ob es eventuell weitere gibt, und wenn ja, welche.

Wenn Sie eine Aufgabe nicht lösen können, geben Sie nicht gleich auf, sondern denken Sie weiter darüber nach. Sie sollten über jede Aufgabe *mindestens eine Stunde am Stück* ununterbrochen nachdenken, bevor Sie sie überspringen; und im Zweifel später wieder zu der Aufgabe zurückkehren. Manchmal hilft es, die Aufgabe besser zu verstehen, wenn Sie die vorgegebene Lösung einfach mal in die Gleichung einsetzen, und sich überlegen, warum es sich um eine Lösung handelt.

a) $x^2 + \sqrt{2}\,x - \frac{3}{2} = 0$

   Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b) $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x+4}{x+2} = 1$

   Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = 0$.

c) $(x^2 + x + 1)^2 + x^2 + x - 5 = 0$

   Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

d) $3e^x = e^{3x}$

   Falls Sie bislang nicht mit Logarithmen gearbeitet haben, oder Ihr Wissen auffrischen möchten, finden Sie im Anhang eine Zusammenfassung der wichtigsten Logarithmen-Gesetze.

   Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = \frac{1}{2}\ln(3)$.

e) $e^x - e^{2x} = \dfrac{3}{16}$

   Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = -\ln 4$.

f) $2^{3-x} = 3^{x-2}$

   Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = \dfrac{\ln 72}{\ln 6}$.

g) $\sin(2x+1) \;=\; 0 \quad$ (mit x im Bogenmaß[1])

Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = \pi - \frac{1}{2}$.

h) $\sqrt{x} \;=\; 2x - 1$

Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = 1$.

i) $\min(3x+1,\ 5x-1) \;=\; x+5$

Dabei steht „min“ für Minimum und bezeichnet die kleinere (negativere) der zwei Zahlen, die man erhält, wenn man für x eine konkrete Zahl einsetzt.
Ist beispielsweise $f(x) = \min(3x+1,\ 5x-1)$, so ist

$$\begin{aligned} f(-1) &= \min(-2,\ -6) = -6 \\ f(0) &= \min(1,\ -1) = -1 \\ f(1) &= \min(4,\ 4) = 4 \\ f(2) &= \min(7,\ 9) = 7 \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = 2$.

Anhang: Logarithmen

Sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Unter der **Exponentialfunktion zur Basis** a versteht man die Funktion $f(x) = a^x$. Sie besitzt eine Umkehrfunktion, den **Logarithmus zur Basis** a, $\log_a(x)$. Er ist definiert für alle $x > 0$ und besitzt folgende Eigenschaften:

1) $a^{\log_a(x)} = x$ und $\log_a(a^x) = x$.
2) Für alle $x, y > 0$ gelten $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ und $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
3) $\log_a(1) = 0$ und $\log_a(a) = 1$.
4) Für alle $x, y > 0$ gilt $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$.
5) Für alle $a > 1$, $b > 1$ und $x > 0$ gilt $\log_a(x) \;=\; \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.
6) $\log_a$ ist streng monoton wachsend. Für $x \to +\infty$ wächst $\log_a(x)$ unbeschränkt an und strebt (sehr langsam) gegen $+\infty$. Für $x \to 0$ fällt $\log_a(x)$ unbeschränkt gegen $-\infty$.

Die **eulersche Zahl** ist $e \;=\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \;\approx\; 2{,}71828$.

Die Exponentialfunktion zur Basis e wird auch *die* Exponentialfunktion genannt, in Symbolen $\exp(x)$. Der Logarithmus zur Basis e heißt **natürlicher Logarithmus** $\ln(x)$, manchmal auch nur $\log(x)$. Unter allen Logarithmen ist der natürliche Logarithmus von besonderem Interesse, da seine Ableitung genau $1/x$ ist.

[1] Bogenmaß, oder auch Radian, ist eine Einheit für die Größe eines Winkels. 180° sind π Radian, 360° sind 2π Radian und beliebige Winkelgrößen rechnet man entsprechend anteilig um, so sind beispielsweise 36° genau $2\pi/10 = \pi/5$ Radian.