Aufgaben zum Vorkurs, WiSe 2020/21

Andreas Lochmann

Teil 2

Bestimmen Sie erneut alle Lösungen der folgenden Gleichungen bzw. Aufgaben.

a) $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

Für diese Aufgabe kann Polynomdivision hilfreich sein, siehe Anhang.

Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = 1$.

b) $\frac{2x+1}{x+2} + \frac{x^2+x-1}{x^3-1} = 1$

Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}}$.

c) $\frac{x^2-x+10}{x^2+3} - \frac{1}{1 + \frac{3x-6}{x^3-2x^2}} = \frac{3x-6}{x^3-2x^2+3x-6}$

Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $x = 7$.

d) $\ln(e^x + 2) = x + 1$

Zur Kontrolle: Die einzige Lösung dieser Gleichung liegt zwischen 0,15 und 0,16.

e) $\begin{cases} x^2 + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $(x, y) = (2, -1)$.

f) Ein Kreis mit Mittelpunkt $(2, 1)$ schneidet eine Gerade im Punkt $(-1, 5)$. Die Gerade hat eine Steigung von -2 . Wo ist der zweite Schnittpunkt?

g) Welche Zahl ist größer: $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ oder $2 + \sqrt{3}$?

Begründen Sie Ihre Behauptung ohne Verwendung der Dezimaldarstellung, also insbesondere ohne Taschenrechner.

h) Welche Zahl ist größer: $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ oder $1 + \sqrt{7}$?

Begründen Sie Ihre Behauptung ohne Verwendung der Dezimaldarstellung, also insbesondere ohne Taschenrechner.

i) Für die Primzahl $p = 3$ ist $7p + 4 = 25$ eine Quadratzahl.

Für welche anderen Primzahlen p ist $7p + 4$ eine Quadratzahl?

Anhang: Polynomdivision

Für die Technik der Polynomdivision verweise ich auf folgendes Video der TU Dortmund:

https://www.youtube.com/watch?v=9HVX_G_jkrg

Der Zusammenhang zur Nullstellenbestimmung wird von Prof. Weitz in diesem Video erklärt:

<https://www.youtube.com/watch?v=Rxv-BP17IQE>

(Die Schreibweise des Divisionsrests ist in diesem Video aber nicht empfehlenswert, da sie bei späteren Rechnungen Fehler provozieren kann.)

Eventuell kann Ihnen auch das Video von Prof. Loviscach weiterhelfen:

<https://www.youtube.com/watch?v=LyEW1i3l-5w>

Herr Loviscach unterrichtet in seinem Kurs Ingenieure, daher weist er am Ende seines Kurses auf die eher theoretische Brauchbarkeit der Polynomdivision hin. Aus Sicht der Mathematik und der Informatik zählt Polynomdivision als Grundwissen, das ähnlich der Multiplikation von Dezimalzahlen zumeist nicht in der Praxis angewendet wird, aber umgekehrt bekannt sein muss, um andere Techniken darauf aufzubauen: Wenn Sie beispielsweise eine komplizierte Rechnung von einem Computer ausführen lassen wollen, die intern eine Polynomdivision verwendet¹, können Sie durch die Kenntnis des Divisionsalgorithmus abschätzen, wie viel Zeit der Computer für die Rechnung an dieser Stelle benötigt. Oder wenn Sie Polynome mit *mehreren* Variablen durch einander dividieren möchten, oder in ungewöhnlichen Zahlenräumen arbeiten, können Sie den gewöhnlichen Algorithmus zur Polynomdivision versuchen zu verallgemeinern.

Es gibt viele weitere Videos und Texte zur Polynomdivision im Internet. Nicht alle davon sind empfehlenswert; teilweise, weil sie sich auf eine andere Zielgruppe beziehen; teilweise, weil die gezeigten Notationen nicht empfehlenswert sind, z.B. weil Sie fehleranfällig sind oder missverständlich sind.

¹beispielsweise die meisten Fehlerkorrekturverfahren, wie Reed-Solomon-Codes für CDs